PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES DE RÉINVESTISSEMENT : UNE SYNTHÈSE, DES PISTES

Catherine HOUDEMENT
Enseignant-Chercheur, ESPE, Université de Rouen
LDAR (**L**aboratoire de **D**idactique **A**ndré **R**evuz)
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Résumé

2016 est l'année de nouveaux programmes pour l'école primaire. On peut raisonnablement penser que les problèmes ne seront pas absents des programmes de mathématiques, mais quelle place tiendront-ils ? La résolution de problèmes arithmétiques de réinvestissement sera-t-elle assumée comme partie prenante des apprentissages numériques ?

C'est sur ce thème que nous développerons une synthèse s'appuyant sur : nos travaux liés aux programmes et aux pratiques ordinaires (Coppé & Houdement 2002, 2010 ; Houdement 1999, 2003, 2009, 2011), le point de vue de psychologues s'intéressant aux mathématiques (Julo 2002), l'étude de pratiques culturelles (Bartolini Bussi & al. 2011), des travaux plus récents (voir Houdement 2015).

La finalité de cette contribution est de poser des balises pour les recherches, les ressources et la formation aux apprentissages numériques.

Ce texte se veut une synthèse sur les problèmes arithmétiques associant des regards de psychologie des apprentissages et de didactique. Il croise plusieurs sources de réflexion : expériences de formation, observations de terrains, analyses de ressources pour enseignants, étude d'élèves résolvant des problèmes. Ce texte s'intéresse aux problèmes numériques ordinaires de la classe et insiste sur l'importance de la réussite aux « problèmes élémentaires », vus comme briques élémentaires de raisonnement. Il propose de revisiter les problèmes arithmétiques (selon une typologie constituée des « problèmes élémentaires », des « problèmes complexes » et des « problèmes atypiques ») qui seront introduits au fil du texte et définis plus précisément dans les paragraphes III et IV. Il montre la nécessité de relancer les recherches sur l'enseignement des problèmes élémentaires en présentant des dispositifs possibles pour ces recherches.

I - ORIGINE DU QUESTIONNEMENT

Notre intérêt pour la résolution de problèmes n'est pas nouveau : dans les années 2000, en résonance avec d'autres chercheurs également formateurs (Coppé & Houdement 2000, 2002 ; Houdement 1999, 2003), nous avions soulevé les questions que posaient, dans les manuels de mathématiques scolaires de l'époque, quelles que soient les collections, les leçons consacrées à la méthodologie de résolution de problèmes verbaux. Dans ces leçons, des tâches préliminaires à la résolution du problème comme souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, trouver la question… étaient proposées aux élèves avec, comme objectif affiché, d'aider ceux-ci à réussir LES problèmes. Nous avions mis en avant plusieurs raisons de contester la finalité affichée de telles tâches. Prélever les informations utiles (et délaisser les inutiles) se fait simultanément au cours du traitement du problème, cela ne peut pas se faire en amont en particulier si le problème résiste au sujet (c'est confirmé par les travaux de psychologie cognitive, voir plus loin). D'autre part, les informations utiles à la résolution sont souvent constituées de tout le texte du problème. Par exemple dans le problème : *Paul a 25 cartes. Il a 7 cartes de plus que Marie. Combien de cartes a Marie ?,* ne retenir que les informations *25 cartes, 7 cartes* ou *7 cartes de plus* ne fait pas avancer vers la réponse.

Par ce type de leçons, on est progressivement passé du *faire résoudre des problèmes sur un thème donné* à *apprendre aux élèves à résoudre des problèmes*. Cet objectif s'appuie sur l'hypothèse (implicite) qu'il existerait une compétence générale de résolution de problèmes dont la possession rendrait le sujet capable de réussir n'importe quel problème. Même si les recommandations des textes des programmes de 2002 (auxquels nous avons contribué) et des articles, notamment dans la revue *Grand N*, ont cherché à limiter cette dérive, celle-ci perdure, notamment dans les ressources proposées sur la Toile[1].

Nous faisons l'hypothèse suivante, que nous ne développerons pas ici (voir Artigue & Houdement 2007, Coppé & Houdement 2010) : le changement progressif de cap sur les problèmes (notamment arithmétiques) et le flou institutionnel autour de ces objets (incontournables dans l'enseignement des mathématiques) sont liés aux différents rôles et formes affectés aux problèmes dans la noosphère et en didactique : les différentes positions vis-à-vis d'un savoir à enseigner qu'occupent les problèmes dans les apprentissages (actuellement en amont, au cours, en aval d'un savoir à enseigner), les différentes fonctions qui leur sont (ou leur ont été) assignées (motiver, introduire, entraîner, réinvestir, légitimer, évaluer, chercher), les différentes formes qu'ils peuvent revêtir (texte minimal ; texte alourdi d'informations ; texte avec ou sans question ; documents authentiques ; situation vécue…).

Avant de poursuivre sur le plan didactique, il est important de s'interroger : que savons-nous du comment on réussit à résoudre un problème ? Les travaux de psychologie cognitive, notamment ceux de Jean Julo, qui a travaillé sur les problèmes scolaires de mathématiques, nous éclairent.

II - POINT DE VUE DE PSYCHOLOGIE COGNITIVE

1 Des exemples pour réfléchir

La résolution de ces problèmes peut aider le lecteur à entrer dans ce paragraphe.

Dans ces quatre énoncés, il s'agit de chercher le nombre de tulipes dans un massif.

a) un massif de fleurs formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires,

b) un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes,

c) un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles,

d) 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques.

Nous ne doutons pas que le lecteur réussisse ces quatre problèmes (que nous appelons « problèmes élémentaires »). Il serait intéressant qu'il essaie de se remémorer comment il a procédé : il a sans doute « à peine réfléchi (surtout pour les trois premiers), il a presque instantanément eu l'idée de l'opération qui lui donne la réponse. Certains participants de la communication au colloque ont cherché, comme dans tout groupe d'adultes interrogés, à reconstituer leur (ou par phénomène de contrat, à construire un nouveau) cheminement : ils ont cité une évocation imagée de la situation ou le repérage de mots inducteurs, comme « et » ou « rangées ».

Les énoncés de ces quatre problèmes s'appuient sur le même contexte, présentent la même structure syntaxique (similarité de lecture-compréhension), posent la même question (combien de tulipes dans UN massif ?), mettent en jeu les mêmes nombres (15 et 60) et pourtant ils relèvent d'opérations arithmétiques différentes. Le rapprochement de ces quatre énoncés invalide déjà les aides méthodologiques évoqués précédemment, car peu de choses, à part les connaissances du sujet qui doit le résoudre (notamment sa compréhension des différentes situations), permet de discriminer ces quatre énoncés. Mais comment faisons-nous, experts, pour discriminer ces quatre problèmes et leur associer une opération directe adaptée ?

Un autre problème est soumis à la sagacité du lecteur, repris du problème du Rallye Mathématique Transalpin appelé *Les châtaignes de Charles* ©ARMT cat.5 6 7.

---

1 Par exemple (1) http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/C6MRSST01.pdf (2) http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/probleme/utile1.htm#CM2 (3) http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/probleme/manquante1.htm#CM2

Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier. Combien de kg de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-t-il ?

La situation est simple, mais la réponse est moins rapidement trouvée que celle des massifs de fleurs. Pourtant le lecteur maitrise tous les raisonnements nécessaires, en particulier le fait de choisir une référence (masse ou mesure de masse) et de reconstruire la situation à l'aide de cette référence. Plusieurs techniques sont possibles : algébrique, appuyée sur des longueurs, arithmétique avec essais erreurs… En cycle 3, nous qualifierons ce problème de « problème a-typique », au collège de « problème complexe ».

2 Les apports de Jean Julo

Jean Julo (1995, 2005), psychologue cognitiviste, s'est intéressé aux aides à la résolution des problèmes scolaires ordinaires. Il a insisté sur l'existence de processus spécifiques de l'activité de résolution de problèmes : « *L'accès aux connaissances et leur instanciation dans une situation donnée ne sont pas des phénomènes triviaux, même dans le cas où l'on a une bonne compréhension et une bonne pratique (entendue comme résultat d'un exercice) de ces connaissances. Ce sont des processus cognitifs* ad hoc *qui vont faire que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour les traiter*. » (Julo 2002, p.35). Ces processus ont un versant représentationnel (développé ci-dessous) et un versant opératoire (évoqué souvent sous le terme de stratégies) en étroite interaction.

Qu'est ce qu'une représentation ? Selon Julo (1995, p.11), « *comprendre quelque chose serait, d'une manière ou d'une autre, construire une représentation de cette chose*. ». Une représentation est le fruit d'une profonde activité mentale mettant en œuvre tout un ensemble de processus chargés de traiter les informations sur notre environnement fournies par nos organes sensoriels. Dans le modèle actuel des psychologues, les représentations plus ou moins stables en mémoire à long terme sont les connaissances (et les croyances) qui nous permettent d'appréhender le monde. La nature des liens entre ces deux « niveaux » de représentations restait en 1995 (Julo 1995, p.12) une des grandes questions de la psychologie cognitive.

Les représentations d'un problème, dont il est question ici, sont des représentations ponctuelles et occasionnelles, Julo parle de *représentations particularisées*. La représentation du problème ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé. La nature d'un problème engage un autre type de représentation. « *Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte.* » (Julo 1995, p.16). L'enjeu de la résolution de problèmes est aussi spécifique : « *C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoyait pas dans un premier temps qui est l'enjeu de cette activité particulière* » (Julo 1995, p.25). Une autre façon de décrire la représentation d'un problème est celle de Clément (2009, p.63) : « *une construction dynamique, transitoire, déterminée à la fois par les propriétés de la situation et les connaissances disponibles en mémoire* ».

D'après Julo (1995, p.90), interviennent dans la résolution de problèmes des connaissances « *liées directement aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos* », ce qu'il désigne sous l'expression 'schémas de problèmes'. « *Ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas*[2] *de problèmes* » (Julo 2002, p.43). On voit le côté récursif du modèle : résoudre un problème passe par la construction d'une représentation de ce problème et la réussite à ce problème enrichit notre mémoire des problèmes… résolus. D'après Julo (1995, p.107), la mémoire des problèmes (sous forme de schémas de problèmes) que nous avons rencontrés et résolus joue un rôle décisif dans la façon dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre.

[2] Attention il ne s'agit pas de schémas graphiques, mais de *schémas cognitifs* : des structures cognitives qui stockées dans la mémoire à long terme, sélectionnent et traitent l'information de manière inconsciente (au sens d'automatique).

3 Conséquences pour l'enseignement

Julo (1995, 2002) enrichit notre compréhension de la résolution de problèmes en parlant de mémoire des problèmes. Pour un élève confronté à un problème, il y a deux possibilités extrêmes : soit il active dès la lecture un schéma adéquat qu'il associe, voire adapte, au problème à résoudre ; soit en l'absence d'instanciation d'un tel schéma, l'élève doit construire « de toutes pièces » une représentation *ad hoc* du problème.

Ce modèle, relativement stabilisé en psychologie cognitive, change radicalement selon nous le rapport aux problèmes pour l'apprentissage et l'enseignement. **Il devient urgent et crucial d'enrichir la mémoire des problèmes de chaque élève** : l'élève disposerait ainsi de plus de schémas et face à un nouveau problème, serait plus à même de pointer des analogies avec quelque chose de déjà rencontré, au moins en partie. Cet enrichissement passe nécessairement par la rencontre des élèves avec des problèmes **qu'ils mènent à terme**. Or l'enseignement, même quand il affirme que l'élève doit être au centre, ne pose pas ce regard sur les problèmes : certes des problèmes sont proposés aux élèves, mais justement ceux qui ont des difficultés peuvent rarement les mener à terme ; l'enseignant suppose souvent qu'assister à la correction (qu'elle soit magistrale ou proposée par l'entremise de brefs exposés d'élèves sur leurs productions) produira des effets positifs sur la prochaine résolution. Julo, suppose que la source des difficultés persistantes des élèves en mathématiques est « *une carence en matière de véritable occasion de résoudre des problèmes* » (Julo 2001, p.10).

Mais quel type de problèmes est-il urgent de faire rencontrer et mener à terme aux élèves ?

Notre hypothèse est la suivante :

- pour enrichir sa mémoire des problèmes, ceux dont on vise la résolution quasi immédiate et qui constitueraient des éléments « simples » du raisonnement, au sens de la chimie de Mendeleïev (les « problèmes élémentaires »[3]). Cette catégorie recouvre les problèmes à deux données [resp. ($2n$+1) données pour les problèmes liés à la proportionnalité], où il s'agit de déterminer la troisième [resp. la (2n+2)$^{\text{ème}}$], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue : les « *one step problems* », objets d'étude des structures additives et multiplicatives de Vergnaud (1986, 1990, dir.1997) ;
- les problèmes « complexes » sont des agrégats de « problèmes élémentaires » : la complexité des problèmes peut venir en effet de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour la construction de la réponse, comme nous le verrons dans le paragraphe III.3 ;
- pour entretenir la construction de stratégies, des « problèmes atypiques »[4] définis justement par leur caractère non routinier, l'ignorance supposée par les élèves de stratégies connues pour les résoudre, mais la possibilité d'être résolus avec des connaissances déjà connues par les élèves.

III - CE QUE NOUS APPRENNENT DES ÉLÈVES RESOLVEURS

La recherche que j'ai menée de 2006 à 2008 (Houdement 2011), sur les problèmes arithmétiques verbaux de réinvestissement, va valider cette hypothèse de l'importance des **problèmes élémentaires** pour la résolution de problèmes en général.

1 Contexte de la recherche

La question de cette recherche volontairement très ouverte était la suivante : quelles « idées », dans le temps court de la résolution d'un problème numérique, sont susceptibles de provoquer une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ? Les problèmes à l'étude étaient des problèmes ordinaires de

[3] Lors de la communication au colloque, ces problèmes étaient qualifiés de « problèmes basiques ». Le choix d'une expression adéquate n'est pas simple : l'expression « problèmes élémentaires » semble plus appropriée, nous la conservons donc

[4] Notamment des « problèmes pour chercher » selon l'expression des programmes du primaire 2002.

la classe, dont le traitement par les élèves déçoit fréquemment les enseignants, notamment parce qu'ils n'utilisent pas à bon escient les opérations arithmétiques.

Notre projet fut d'étudier les stratégies développées par les élèves confrontés à ces problèmes, faisant l'hypothèse qu'il existait des connaissances en jeu dans la résolution de problèmes arithmétiques de réinvestissement, connaissances à caractère générique, dont la possession outillerait l'élève alors que l'absence le bloquerait dans sa résolution. *A priori* ces connaissances seraient ignorées des institutions (école, didactique) : elles seraient nécessaires pour réussir, mais non repérées par les institutions d'enseignement, voire même ignorées de la didactique, dans une problématique d'enjeux cachés d'apprentissage (Castela 2008).

La méthodologie employée fut celle d'entretiens semi-directifs à visée d'explicitation[5] (Vermersch 1994) avec des élèves de cycle 3 (grades 3 à 5, 8 à 11 ans) après qu'ils aient résolu individuellement des problèmes ordinaires de réinvestissement. Nous avons étudié onze protocoles d'élèves de deux classes différentes (A et B) de cycle 3 (CE2, CM1, CM2, élèves de 8 à 11 ans) en les mettant en relation avec copie et brouillon. En faisant des croisements entre des pensées de plusieurs élèves, nous avons ainsi dégagé des redondances entre élèves ou des régularités dans la pensée d'un élève particulier.

Nous présentons ici quelques résultats.[6]

2 Problèmes élémentaires : des jeux d'inférence et de contrôle

Comme prévu dans le modèle de Julo, certains élèves infèrent directement du contexte l'opération comme le traduisent leurs verbalisations à notre question, montrant le rôle sans doute leur mémoire… des problèmes :

CH : *Comment tu sais pour un problème que c'est moins / plus / fois ?*

Victor *(CE2, A) : Bah quand j'ai la question je sais moins / plus / fois.*

Clémence *(CE2, B) : Bah quand je lis l'énoncé ça me vient comme ça / quand je le lis.*

Sébastien *(CE2, A) : Parce que là j'ai pas vraiment réfléchi / donc j'ai pris une feuille de brouillon et pis j'ai écrit j'ai écrit, et pis j'ai trouvé.*

Pour d'autres (ou les mêmes en d'autres occasions), la convocation de l'opération semble moins immédiate : ils **infèrent** « seulement » le champ conceptuel (hésitent entre addition et soustraction ou entre multiplication et division), puis ils décident de la « bonne » opération par différents types de contrôle. Parfois ils testent successivement plusieurs opérations : ils évaluent ou calculent le résultat avec l'une, puis l'acceptent ou le rejettent et alors essaient une autre opération.

Ainsi Deborah (CM2, A), ayant à trouver le poids d'une table connaissant la masse (300 kg) de 25 tables, essaie une division qu'elle infère sans doute du contexte : ce que nous appellerons une **inférence sémantique** (premier extrait). Mais devant notre question, elle a un moment de doute, elle hésite entre deux opérations (du même champ conceptuel) et met en œuvre pour les départager deux contrôles. Le premier (second extrait) concerne l'ordre de grandeur du résultat calculé relativement au contexte (*c'est beaucoup trop,* sous-entendu pour le poids d'une table), nous le nommerons un **contrôle pragmatique.** Le second (troisième extrait) **est** un **contrôle sémantique,** qui renforce pour elle l'idée de la division (*partager c'est diviser*). Les deux contrôles lui font rejeter la multiplication.

Premier extrait :

CH : *Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?*
Deborah [hésitante] : *Oui / Enfin…*
CH : *Si tu as besoin d'un papier…*

---

[5] Selon Faingold, collaboratrice de Vermersch, l'entretien d'explicitation est une technique de questionnement qui permet de mettre à jour des connaissances implicites mobilisées dans l'action, par un guidage très précis des verbalisations (Faingold, N., Accéder aux savoirs implicites de l'acte pédagogique : l'entretien d'explicitation avec les enseignants experts. *Actes du premier congrès AREF*, mars 1993).

[6] Pour plus de détail sur la recherche, voir Houdement (2011).

Deborah [en regardant CH] : *Je vais faire 300 divisé par 25. (*Elle pose la division 300 par 25) *on trouve 12.*

Second extrait :

CH *: Alors qu'est ce que c'est 12 ?*
Deborah *: le poids d'une table*
CH *: Es-tu sure de ça ?*
Deborah *: Non ça m'étonnerait.*
CH *: Pourquoi ça t'étonnerait ?*
Deborah *: Bah c'est beaucoup / c'est pas assez je veux dire.*

Troisième extrait :

Deborah : *Bah je doute un petit peu.*
CH : *Tu doutes un peu parce que tu trouves que c'est pas assez 12 pour une table ? Est-ce que tu doutes de l'opération que tu as faite ?*
Deborah : *Bah no… non*
CH : *Tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?*
Deborah : *Oui je pense.*
CH : *POURQUOI tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?*
Deborah : *Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.*

Nous avons mis ainsi en évidence des inférences et des contrôles sur le résultat calculé pour sa transformation en une réponse. Les inférences et les contrôles sont des constructions mentales personnelles (souvent implicites, voire inconscientes) qui font avancer le sujet. Un contrôle n'assure pas nécessairement une réponse exacte : il s'agit de contrôle-vérification[7] au sens de Coppé « *argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat (…). Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification* » (Coppé, 1995, p. 30).

Nous avons repéré des contrôles de plusieurs natures.
Nature sémantique : c'est l'interprétation de la situation du problème (Coquin-Viennot & Moreau, 2007 ; Vergnaud 1997), interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème (au sens de Julo, 1995) qui déclenche des associations de type : 'partager c'est diviser' ; 'fois c'est multiplier'. *A priori* ce type d'interprétation se place en amont du choix d'une opération, d'un calcul, c'est alors une inférence. Dans la suite, nous ne distinguerons plus inférences et contrôles, mais uniquement la nature de ceux-ci, qui est en relation avec les connaissances que les élèves convoquent pour résoudre le problème.
Nature pragmatique : c'est la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème qui permet d'inférer et/ou qui régule le résultat (par exemple l'ordre de grandeur) et éventuellement convainc l'élève de s'engager dans un autre calcul. Notons que cette connaissance du réel (conjoncturelle et locale) peut aussi faire obstacle à l'obtention de la réponse, le réel du problème n'étant pas toujours celui que l'élève fréquente dans son environnement.

Voici d'autres exemples d'inférences et contrôles sémantiques et pragmatiques.

Nicolas (CM2, A) utilise le contrôle pragmatique pour tester l'opération.
CH : *D'accord. Et comment tu sais que tu dois choisir plus ou multiplier ?*
Nicolas : *J'essaie comme ça.*
CH : *T'essaies comme ça ? Et comment tu sais si ça va ou si ça va pas ?*
Nicolas : *Bah, quand je vois que le nombre est trop grand ou trop petit ou que ça me paraît un peu trop.*

---

[7] Il existe aussi de tels contrôles en mathématiques : la preuve par neuf est un contrôle mathématique du résultat calculé d'une multiplication, il ne valide pas la réponse, mais augmente sa plausibilité (la réponse est valide modulo neuf).

Ludivine (CM2, A) infère la bonne opération et la contrôle sémantiquement (pour elle, la division diminue le nombre de départ, la multiplication l'augmente) et pragmatiquement (il faut plus d'œufs que de brioches).
CH : *Bon ça va faire combien d'œufs : 3 œufs pour une brioche, combien pour 8 000 ?*
Ludivine : *Je sais pas // C'est une multiplication.*
CH : *C'est un partage* [évoqué par Ludivine plus haut dans l'entretien*] ou une multiplication ?*
Ludivine [silence, puis lentement*] : Si on fait une division, on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.*
CH : *Alors ?*
Ludivine : *Bah, une multiplication.*

Nous avons relevé des inférences et contrôles **syntaxiques :** c'est ainsi que nous qualifions, au sens de Duval (2006), les transformations d'écritures et reformulations langagières d'une part, et les conversions entre oral et écrit d'autre part. Par exemple un élève qui modélise le problème cherché par la phrase *« il faut faire 573 plus quelque chose égale 1260 »* peut la convertir en l'écriture 573 + ? = 1260. Il peut résoudre cette équation par approximations ou la transformer en la recherche de la différence 1260 – 573 qui lui fournit la réponse. Un autre élève qui avait traduit le problème « ranger 1860 voitures en cartons de 6 » par *« j'ai essayé de faire 6 fois quelque chose… »* est resté bloqué sur cette expression langagière orale sans doute par défaut d'écrire au moins 6 x ? = 1860.

3 « Problèmes complexes » : la nécessité de connecter des informations et de qualifier les résultats

Considérons le problème suivant donné par un des enseignants : *Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6 € par séance et un enfant paye 4 € par séance. À la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. À la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est 542 €. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?*[8]
Ce problème n'est pas un *problème élémentaire,* mais un agrégat de *problèmes élémentaires…* cachés : un travail du résolveur est de construire des *problèmes élémentaires* sous-jacents (1) calculables et (2) qui font avancer vers la réponse. Par exemple, les sous-problèmes élémentaires calculables sont :

- séance du soir : nombre de personnes, prix que payent les adultes, prix que payent les enfants, PUIS recette du soir ;
- séance de l'après midi : prix que payent les adultes ;
- nombre d'adultes PUIS recette venant des adultes sur les deux séances.

Construire ces problèmes nécessite au-delà du calcul, de mettre en relation, de **connecter** des informations (souvent éloignées l'une de l'autre dans le texte). Il s'agit aussi de savoir quels problèmes sont calculables, ce qui nécessite, à notre avis, d'avoir mémorisé antérieurement des problèmes élémentaires résolus.
Mais ce n'est pas tout ; une autre connaissance est nécessaire, que nous avons nommée la **qualification.**

Examinons la réponse de Nicolas (CM1).

*Bah là j'ai essayé de faire / parce que un adulte c'est 6 € et un seul enfant 4 €/ un adulte c'est 6 € donc j'ai fait 15 fois 6, **90** / ensuite il y avait 20 enfants à la séance / comme c'était 4 € j'ai fait 20 fois 4, **80** / euh/ il y avait 50 adultes donc j'ai fait 50 fois 6, **300** / et là il demandait combien il y a d'enfants à cette séance / donc j'ai additionné ces 3 là et j'ai trouvé 542 / j'ai trouvé la recette de la journée / j'ai trouvé 72 enfants.*

Nicolas a construit les sous-problèmes calculables utiles, mais il ne trouve pas le nombre d'enfants : le 72 calculé correspond au prix qu'ont payé les enfants lors de la séance de l'après midi ! Nous pointons dans ses propos un défaut de **qualification** du résultat comme le confirme la suite de l'entretien.

---

[8] Extrait de ERMEL (1997 ; 2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris : Hatier.

CH : *Alors là quand tu / est ce que… / quand tu calcules cela / qu'est ce que tu calcules / ça correspond à quoi le nombre 90 que tu cherches ?*
Nicolas :(silence)
CH : *Le nombre 90 que tu as trouvé là / si tu pouvais me donner une petite phrase qui va avec ce nombre là.*
Nicolas : (silence)
CH : *Tu vois pas / donc quand tu as fait le calcul tu avais envie de faire ce calcul-là mais tu vois pas à quoi correspond 90 ?*
Nicolas : *Non*

CH : *Et ce calcul là (*en montrant sur la feuille 20 x 4*) / est ce que tu vois à quoi il correspond ?*
Nicolas : *à 4 fois 20*
CH : *Mais par rapport au problème, qu'est-ce que tu as calculé par rapport au problème ?*
Nicolas : *bah 4 € et 20 enfants*
CH : *Et finalement quand tu fais 4 € et 20 enfants qu'est ce que tu obtiens à la fin ?*
Nicolas : *80 €*

Nicolas parvient à grand peine, avec notre aide, à **qualifier faiblement** sa réponse. Nous distinguons en effet **qualification faible**, le fait de préciser l'unité de mesure (en bref, de donner la grandeur réponse, ici 80 €, un prix) et **qualification,** le fait d'expliciter le rôle que joue la grandeur dans le problème (ici le prix qu'ont payé les enfants à la séance du soir).

A contrario Corentin, dans la même classe, sait qualifier. Il a aussi pris conscience de l'importance de la qualification pour la résolution de problèmes complexes. En effet, il cite spontanément la mémoire d'un problème « difficile » : « *en fait, j'avais mélangé le nombre de T-shirts et les euros* ».

Pour le problème, « *Le libraire dit : « Avec mes 2255 €, si j'achète 36 livres d'art à 62 €, il me restera 13 €. A-t-il raison ?* », il a écrit sur son brouillon :
2255 : euros
36 : livre-darts
62 : prix des livre-darts.

Lors de l'entretien, il dit :
En fait, dans ma tête, quand je lis / là il y a 2 255 € / ça c'est clair / y a 36 livres ça coûte 62 €/ après je calcule ces deux là / après ça fait le nombre d'euros que je dois payer / et après je compare les deux que j'ai / le nombre d'euros et ce que j'ai trouvé.

4 Conclusion sur cette recherche

L'étude des pensées d'élèves lors de la résolution de problèmes arithmétiques nous a confortée sur la pertinence du modèle de Julo, l'existence de schémas de problèmes, d'une **mémoire des problèmes** résolus, qui permet l'inférence de l'opération ou du champ conceptuel dont relève le problème. Ces références mémorielles sont filtrées par des inférences et contrôles sémantiques, pragmatiques et syntaxiques.

Résoudre un **problème complexe** nécessite de **connecter** des informations pour construire des sous-problèmes calculables, souvent **élémentaires, et** utiles pour avancer vers la réponse (représentation du problème), mais aussi de **qualifier** les résultats intermédiaires (pour rester dans le domaine des grandeurs contextualisées), et d'avoir pris conscience de la nécessité de ce travail de pensée. Le lecteur aura pointé que le qualificatif **problème complexe** s'est enrichi dans cette étude par rapport à l'utilisation faite dans ERMEL CM1 (1997, p.261) (pour décrire des problèmes dont la solution nécessite l'utilisation successive de plusieurs opérations) qui avait été reprise dans les textes de programmes du primaire 2002.

Le rôle que jouent les problèmes élémentaires dans la résolution des **problèmes complexes** renforce la nécessité d'un enseignement renforcé des **problèmes élémentaires**.

IV - LES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES

1 Quels sont-ils ?

Au fil du texte, nous en avons donné des caractéristiques (voir notamment II.3). Précisons davantage.

Grâce aux travaux de Vergnaud (Vergnaud 1986, 1990) et notamment de l'équipe autour d'Hervé Péault (Vergnaud dir. 1997), les **problèmes élémentaires** arithmétiques sont définis et hiérarchisés selon la complexité des raisonnements en jeu. Ce modèle des structures additives et des structures multiplicatives est connu en didactique depuis fort longtemps, mais il reste mal compris et parfois même mal enseigné dans les centres de formation.

Pour nous, ces travaux règlent aussi la question du « sens des opérations » grâce aux structures additives et multiplicatives : **le sens de l'addition, indissociable de celui de la soustraction, serait constitué par le fait de savoir résoudre des problèmes élémentaires de structure additive, ce sens s'enrichirait lors de la résolution de problèmes relevant de** raisonnements plus complexes (au sens de Vergnaud 1997). Par exemple, un problème de transformation d'état avec état final inconnu est moins complexe qu'un problème de transformation d'état avec état initial inconnu en début de cycle 2. Un problème de transformation d'état, quelle que soit la place de l'inconnue, est moins complexe qu'un problème de composition de transformations de sens opposés.

Pour illustrer, voici des exemples de problèmes **élémentaires** multiplicatifs.

- Une piste d'athlétisme mesure 400 m. Paul fait 5 tours de piste. Quelle distance a-t-il parcourue ? *Problème élémentaire en CE2*
- Dans cette salle, il y a 18 rangées de 25 fauteuils. Combien de personnes peuvent s'asseoir sur un fauteuil ? *Problème élémentaire en CE2*
- Pierre met huit minutes pour aller de chez lui à l'école. Zélie met quatre fois plus de temps. Combien de temps met Zélie ? *Problème élémentaire en CE2*
- Cette salle comporte 400 places disposées en 25 rangées régulières. Combien de places par rangée ? *Problème élémentaire en CM*
- Alice met douze minutes pour aller de chez elle à l'école, trois fois moins de temps que Ryan. Combien de temps met Ryan ? *Problème élémentaire en CM*

Il serait sans doute pertinent de proposer, dans les programmes, des exemples de **problèmes élémentaires** par cycle, ceux dont on vise la résolution « quasi automatique » (à la façon de Victor, Clémence, Sébastien, paragraphe III.2 de ce texte) en fin de cycle en s'appuyant sur une description selon le modèle de Vergnaud.

Dans une classe, des problèmes non élémentaires à un moment donné peuvent le devenir s'ils sont fréquentés à l'école et après que les problèmes élémentaires relevant du même raisonnement aient été travaillés et résolus par l'élève.

Par exemple, le problème « *Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. Pierre a 3 pommes. Combien de pommes a Anne ?* » n'est pas un problème élémentaire en début au CP, à cause de sa formulation : la réponse donnée en CP est d'ailleurs souvent 9. En revanche, le problème « *Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. 3 des pommes appartiennent à Pierre, les autres appartiennent à Anne. Combien de pommes a Anne ?* » est un problème élémentaire au CP. Le nombre de réponses correctes augmente de façon significative par rapport au précédent.

Pour des raisons voisines, le problème « *Une place de spectacle scolaire coûte 2 €. Combien la classe doit payer pour que la classe de CE2 de 30 élèves puisse aller voir le spectacle ?* » (*Euro Maths* Hatier CE2 2010) n'est pas élémentaire : une partie des informations est en effet logée dans la question, ce qui nécessite des connections.

Il se pourrait que, pour un sujet, les **problèmes élémentaires** soient d'abord représentés en mémoire par un « prototype »[9] (comme le carré avec ses côtés parallèles aux bords de la feuille). Il se pourrait que progressivement ce schéma s'enrichisse au fur et à mesure de la fréquentation des adaptations de ce prototype (au sens de Robert 2008) ce qui permettrait de réussir en « mode automatisé » des problèmes moins élémentaires.

2 Comment les enseigner ?

L'enjeu de cet enseignement est très clair : il s'agit de permettre aux élèves de **réussir seuls** ces problèmes. Il est urgent de consacrer plus de temps à la résolution de problèmes élémentaires. Quels dispositifs d'enseignement, adaptables aux classes ordinaires, mettre en place avec cette finalité ? Pour nous, c'est une question cruciale sur laquelle devraient se concentrer les recherches.

Les situations d'enseignement, transposées de situations didactiques de Brousseau & alii, qui cherchent à mobiliser les connaissances des élèves en situation (phases d'action), à faire expliciter leurs modèles d'action, à nommer et travailler les savoirs induits par ces actions et mis en mots, participent à cet enrichissement des problèmes résolus. En revanche, ces travaux prennent peu en charge les entrainements systématiques sur les problèmes arithmétiques, autrement dit l'exercice des problèmes arithmétiques.

D'autres travaux visent une catégorisation, implicite ou explicite des problèmes résolus. La thèse de Priolet (2008) va dans ce sens (explicite) en apprenant à l'élève à relier les problèmes résolus et à consigner ces relations dans un cahier structurant. Les recherches de Julo (1995), reprises et étendues par Nguala (2009) visent à faciliter la construction de la représentation du problème en proposant à la résolution, non pas un seul problème à la fois, mais plusieurs problèmes, qui se ressemblent quant aux raisonnements en jeu et aux données numériques, mais qui ont des contextes évoqués différents. Ce dispositif augmente la réussite à chaque problème et *a priori* (du moins théoriquement) concourt à la mémorisation des problèmes… résolus. L'idée de faire résoudre, non pas un problème, mais une série de problèmes « ressemblants » entre en résonance avec les assortiments de Genestoux (2002) : Genestoux considère que faire résoudre à un élève une suite d'items, qui relèvent de la même connaissance et sont judicieusement choisis (un assortiment), permet à cet élève d'apprendre cette connaissance.

Plus récemment, nous avons été interpelée par les pratiques ordinaires de l'enseignement en Chine (Cai & Nie 2007; Sun 2011) et l'importance des « variations », mise notamment en valeur par Bartolini-Bussi (2011). Les variations de problèmes semblent être la méthode standard d'approche des problèmes. Il s'agit d'apprendre aux élèves à voir dans la même situation (de tous les jours ou en mathématiques) différentes façons de combiner des nombres, de demander aux élèves de résoudre non pas un, mais une série de problèmes ressemblants (même contexte, mêmes valeurs numériques, mais calculs relationnels différents : combinaison, changement, comparaison) accompagnés de schémas (graphiques) de résolution, puis d'inciter les élèves, après résolution, à formuler des ressemblances et des différences entre ces problèmes. Un exemple de telle leçon, traduite en anglais par Bartolini-Bussi (2011), figure en annexe. Or les élèves chinois sont de meilleurs résolveurs de problèmes que les autres, dans des classes souvent très chargées… Cela entre en résonance avec les travaux de Vergnaud sur les champs conceptuels additifs et multiplicatifs et les types de raisonnement en jeu, mais aussi avec ceux de Julo sur les aides à la construction de la représentation d'un problème. Il est remarquable de trouver dans des pratiques d'enseignement traditionnelles orientales la scénarisation de principes dégagés par des

[9] C'est une des trois formes supposées par Julo pour les schémas de problèmes (Julo 2002, p.35-36).

recherches didactiques occidentales bien postérieures. Bartolini-Bussi (2011) souligne aussi cette différence fondamentale, portée par la philosophie chinoise : plutôt que d'analyser et de classer les problèmes (l'attitude des pays occidentaux), les problèmes sont considérés comme un **tout** par les enseignants et les enseignants les font travailler comme un **tout** par des élèves de CE1.

V - CONCLUSION

La résolution réussie des problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique de l'école, et ce dans tous les pays du monde.

Dans ce texte, en nous appuyant sur divers travaux, nous avons tiré des fils conducteurs pour essayer d'améliorer cette réussite :

- comprendre ce qui se joue pour le sujet dans la résolution, notamment cette dialectique (mentale) entre inférence automatique d'une stratégie efficace (**mémoire des problèmes**) et construction d'une nouvelle stratégie si le problème n'évoque rien de connu ;
- considérer comme un objectif premier d'enrichir la mémoire des problèmes résolus de chaque élève, puisque la richesse de cette mémoire conditionne la réussite à de nouveaux problèmes : exploiter les dispositifs qui vont dans ce sens (développement), en bâtir d'autres (recherches) ;
- penser **le sens d'une opération** (qui s'enrichit progressivement) comme **la capacité à résoudre des problèmes** (relevant de raisonnements progressivement plus complexes, au sens de Vergnaud) **qui relèvent du champ conceptuel** (structures additives *versus* structures multiplicatives) **associé à cette opération** ;
- envisager les problèmes en trois types[10], notamment pour leur fonction dans la résolution de problèmes : **problèmes élémentaires** dont il est attendu une résolution « automatisée » ; **problèmes complexes**, agrégats de problèmes élémentaires dont la construction et/ou la connexion des informations, nécessaires pour la résolution, sont à la charge de l'élève ; **problèmes a-typiques** dont la résolution demande la construction d'une stratégie, à défaut d'une ressemblance que percevrait le sujet avec un problème déjà résolu.

La résolution de problèmes en général, voire de tâches complexes, est devenu un des moyens d'évaluer la pertinence de l'enseignement d'un pays (études PISA). Or la résolution de tels problèmes nécessite, au minimum, la mémorisation de problèmes élémentaires (relevant des savoirs en jeu) et la capacité à connecter des informations. L'école doit aussi prendre à sa charge cette construction.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M. & HOUDEMENT C. (2007) Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, **39,** 365-382.

BARTOLINI-BUSSI M.A., CANALINI R. & FERRI F. (2011) Towards Cultural Analysis of Content: Problems With Variation In Primary School. *Proceedings SEMT 11*, Prague. Consulté 15-09-2015 www.mmlab.unimore.it/site/home/shuxue.../documento16021552.html

CAI J. & NIE B. (2007) Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *Zentral Blatt für Didaktik der Mathematik*, 39, 459–473.

[10] entre lesquels les frontières sont mouvantes ; un problème de partage, atypique en début de cycle 2, devient élémentaire en fin de cycle 2. Pour un élève donné, un problème *a priori* élémentaire dans le niveau de classe (par exemple *nombre de pages complètes* si *50 photos sont collées dans un album à raison de 8 photos par page*), peut rester a-typique, par défaut de mémorisation : il ne pourra donc pas produire l'opération « minimale » attendue (par exemple *50 :8=*).

CASTELA C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 28/2, 135-182.

COPPE S. (1995) Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, 129-144. In *Différents types de savoirs et leur articulation.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

COPPE S. & HOUDEMENT C. (2000) Étude des activités de résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3. *Actes du Colloque sur la formation des maîtres en mathématiques.* Limoges 1999 (pp.209-224). IREM de Limoges

COPPE S. & HOUDEMENT C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N,* 69, 53-63.

COPPE S. & HOUDEMENT C. (2010) Résolution de problèmes à l'école primaire : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du 36ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques.* Auch 2009 (pp.48-71). ARPEME.

COQUIN-VIENNOT D. & MOREAU S. (2007) Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology,* **77**, 69-80.

DUVAL R. (2006) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du 32ème colloque sur la Formation des Maîtres* (pp.67-89). Strasbourg 2005. IREM de Strasbourg.

GENESTOUX-ESMENJAUD F. (2002) Les assortiments didactiques. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds) *Actes de la 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 177-186). La Pensée Sauvage.

HOUDEMENT C. (1999) Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, **63,** 59-76.

HOUDEMENT C. (2003), La résolution de problèmes en question. *Grand N*, **71,** 7-23.

HOUDEMENT,C. (2009) Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **14**, 31-59.

HOUDEMENT C. (2011) Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **15,** 67-96.

HOUDEMENT C. (2015) Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes. *Gazette de la 18ème Rencontre internationale du RMT.*

JULO J. (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Presses Universitaires de Rennes.

JULO J. (2001) Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? (pp.9-28). In *Actes du 27ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques,* Chamonix 2000. IREM de Grenoble.

JULO J. (2002) Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N,* **69**, 31-52.

NGUALA J.B. (2009) *Multi-présentation de problèmes comme dispositif de réapprentissage au cycle 3 de l'école primaire. Mise en place, portée et limites*. Thèse. Université Paris Denis Diderot.

PRIOLET M. (2008) *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique.* Thèse Université de Lyon 2.

ROBERT A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Fabrice Vandenbrouck (coord.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.45-57). Paris : Octarès Éditions.

SUN X. (2011) An Insider's Perspective: "Variation Problems" and Their Cultural Grounds in Chinese Curriculum Practice. *Journal of Mathematics Education,* **4.1**, 101-104.

VERGNAUD G. (1986) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N,* **38**, 21-40.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10-2.3**, 133-170.

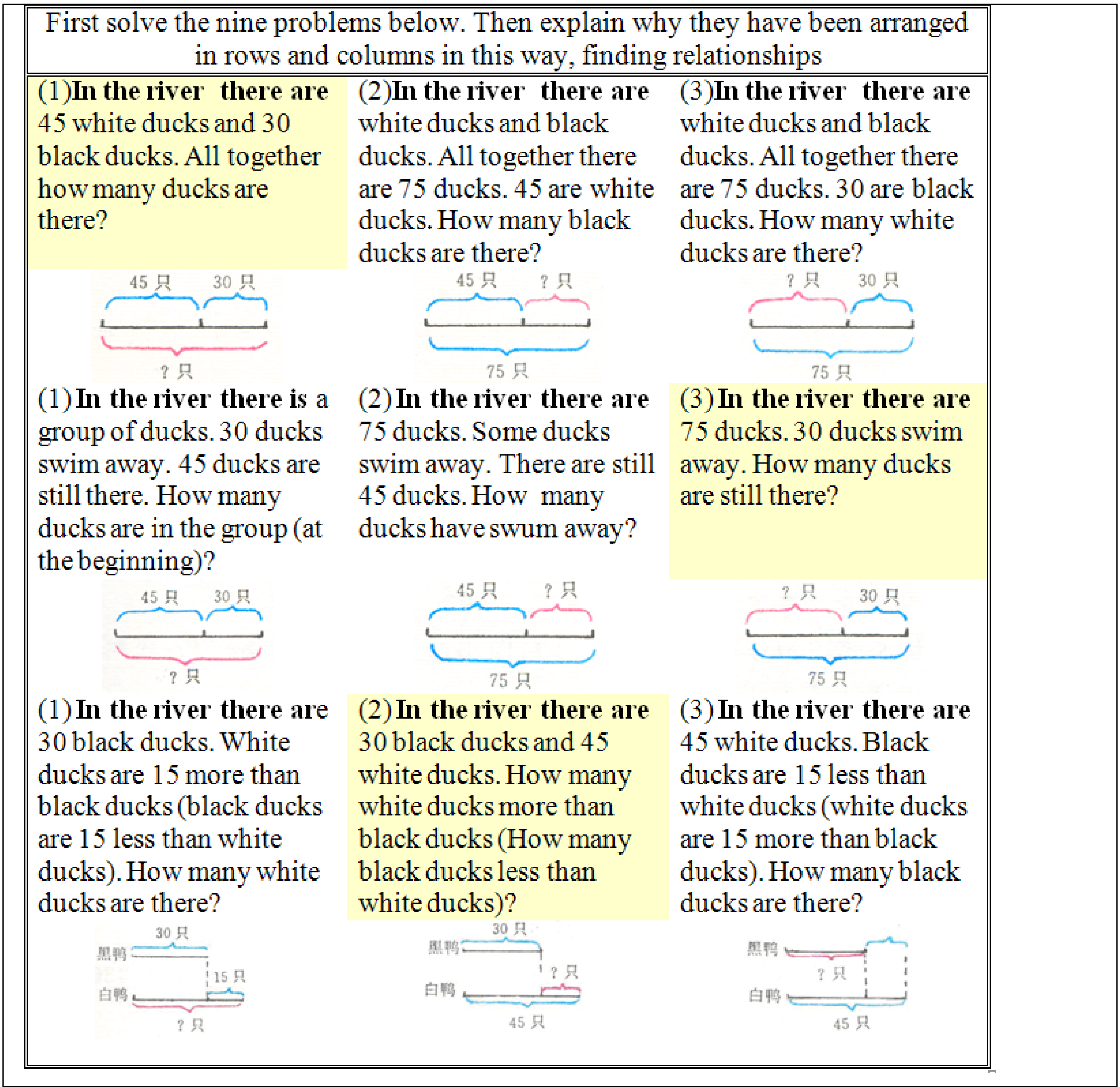
VERGNAUD G. (dir. 1997 ; 2001) *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes.* Paris : Nathan

VERMERSCH P. (1994) *L'entretien d'explicitation en formation continue et initiale.* Paris : ESF.

VII - ANNEXE

Un extrait de manuel chinois de l'équivalent CE1 (grade 2) :

The nine problems of ducks (Sue Xue 1996) **Problems with variation**



First solve the nine problems below. Then explain why they have been arranged in rows and columns in this way, finding relationships

(1) In the river there are 45 white ducks and 30 black ducks. All together how many ducks are there?

(2) In the river there are white ducks and black ducks. All together there are 75 ducks. 45 are white ducks. How many black ducks are there?

(3) In the river there are white ducks and black ducks. All together there are 75 ducks. 30 are black ducks. How many white ducks are there?

(1) In the river there is a group of ducks. 30 ducks swim away. 45 ducks are still there. How many ducks are in the group (at the beginning)?

(2) In the river there are 75 ducks. Some ducks swim away. There are still 45 ducks. How many ducks have swum away?

(3) In the river there are 75 ducks. 30 ducks swim away. How many ducks are still there?

(1) In the river there are 30 black ducks. White ducks are 15 more than black ducks (black ducks are 15 less than white ducks). How many white ducks are there?

(2) In the river there are 30 black ducks and 45 white ducks. How many white ducks more than black ducks (How many black ducks less than white ducks)?

(3) In the river there are 45 white ducks. Black ducks are 15 less than white ducks (white ducks are 15 more than black ducks). How many black ducks are there?