

CALCUL

Formation CP REP
20-03-19

Quels sont les différents calculs ?

Calcul mental → pas de traitement écrit du calcul lui-même, même si le résultat peut être écrit (l'énoncé parfois aussi).

Calcul posé → usage d'une technique opératoire

Calcul en ligne → écrits (partiels) des calculs intermédiaires. Étape vers le calcul mental. Repose sur la compréhension du nombre, du principe de numération décimale et des propriétés des opérations

Calcul réfléchi → élaborer une **procédure adaptée** en fonction des opérations et des nombres.

Fait appel au **raisonnement**, à des **procédures automatisées** ou non.

Calcul automatisé → réponse à « $a \times b$ » ou « $a + b$ (les tables) **restitution la plus directe possible**.
Pour les tables on parle de **faits mémorisés**.

Calcul rapide → critère de **performance** pour la **restitution des tables**, pas une forme de calcul

BO 3 du 26 avril 2018

A l'école élémentaire... toutes les formes de calcul (mental, en ligne, posé...) mobilisent à la fois

- La connaissances de résultats mémorisés (compléments à 10, résultat des tables)
- Le sens des opérations
- La mémorisation de faits numériques

Une programmation structurée, alliant **rythme assez soutenu et réactivations très fréquentes** est nécessaire. **Il doit faire l'objet d'un apprentissage en classe.**

- Le calcul mental

Le calcul mental **doit faire l'objet d'une pratique quotidienne moyenne d'au moins 15 minutes**. On privilégiera **l'alternance** de séries de **séances d'entraînement courtes** (10 à 15 minutes) avec des **séances longues** (30 à 45 minutes) **visant des apprentissages procéduraux spécifiques**.

La pratique du calcul mental s'appuie aussi sur **une bonne compréhension et une bonne connaissance de propriétés des nombres et des opérations** qui doivent être enseignées et formalisées.

BO 3 du 26 avril 2018

- Le calcul en ligne

Le calcul repose sur les mêmes principes que le calcul mental.

Le support de l'écrit permet d'**alléger la mémoire de travail** en notant des résultats intermédiaires.

- Le calcul posé

Le calcul posé repose sur la connaissance de faits numériques (tables) et sur celle d'algorithmes opératoires.

Les **4 algorithmes opératoires** (additions, soustractions...) doivent faire l'objet d'un **enseignement précis**. Le rythme doit être soutenu au début de l'apprentissage pour que l'automatisme s'installe (et donc sûreté pour l'élève)

Chacun des calculs doit faire l'objet d'un **entraînement spécifique** . L'élève doit pouvoir **choisir le mode de calcul qui lui paraît le plus facile** lors de résolution de problème.

→ nécessité d'acquérir des automatismes

Attention : Le calcul en ligne n'est pas une autre manière d'écrire un calcul posé !

En **calcul en ligne**, les étapes écrites utiles pour l'élève peuvent, dans un premier temps, se présenter sous **différentes formes** :

- calculs séparés,
- arbres de calcul,
- écritures utilisant des mots ou des flèches,
- ou tout autre écrit qui accompagne la démarche de l'élève ;

Progressivement, en **fin de cycle 3**, ces étapes s'organisent pour devenir un calcul écrit en ligne **conforme du point de vue des écritures mathématiques**.

Exemples de calcul en ligne

A vous de jouer...

Trouvez différentes façons de calculer :

$$26 \times 12$$

Permet de manipuler quelques propriétés :

$$26 \times 12 = 12 \times 26 = 10 \times 26 + 2 \times 26 = 260 + 52 = 312$$

$$26 \times 12 = 26 \times 4 \times 3 = 104 \times 3 = 312$$

$$26 \times 12 = 20 \times 12 + 6 \times 12 = 240 + 72 = 312$$

$$26 \times 12 = 25 \times 12 + 12 = 25 \times 4 \times 3 + 12 = 312$$

$$26 \times 12 = 26 \times 2 \times 6 = 52 \times 2 \times 3 = 104 \times 3 = 312$$

$$26 \times 12 = 2 \times 13 \times 2 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 39 \\ = 2 \times 2 \times 78 = 2 \times 156 = 312$$

commutativité

Propriété d'une opération qui permet de changer l'ordre des termes sans en changer le résultat.

associativité

Propriété d'une opération dans laquelle les termes peuvent être groupés de différentes façons, sans que le résultat de l'opération ne soit modifié.

distributivité

une opération qui permet de passer d'un produit de sommes à une somme de produits

Les écrits transitoires

- Les **étapes de calcul écrites** par les élèves doivent être conçues comme un **support à la pensée**. Elles peuvent ne pas respecter tous les codes de la rédaction mathématiques
- Cet écrit est toléré, mais doit être fait dans un **support dédié** (cahier de recherche, de brouillon ...) pour le différencier de l'écrit institutionnel.
- Cependant, lorsqu'il est réalisé par l'**enseignant** (lors d'une mise en commun ou une synthèse) , il doit être **mathématiquement correct et compréhensible de tous**.

Statut du signe « = »

- le signe « = » signifie l'équivalence entre les deux membres (alors qu'il est vécu comme le résultat -renforcé par l'usage des calculatrices).
- Le calcul en ligne et les décompositions permettent de faire un lien entre 2 écritures distinctes d'un même nombre, à lire dans les 2 sens.

Exemple : $26 \times 5 = 13 \times 2 \times 5$

Exemple

« À la boulangerie j'achète trois croissants à 1 €, deux pains à 2 € et une brioche à 5 €.

Quel est le montant de mes achats ? »

Production 1 :

$$3 \times 1 = 3 + 2 \times 2 = 7 + 5 = 12$$

Production 2 :

$$3 \times 1 + 2 \times 2 + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$$

Dans la production 1,
 $3 \times 1 = 3 + 2 \times 2 = 7 + 5 = 12$

Le signe « = » ne lie pas des nombres égaux.

Cette écriture du calcul est à considérer comme un **écrit transitoire**.

- ne **pas sanctionner l'écrit** de l'élève **si la démarche sous-jacente est bonne** (comme dans notre exemple) mais lui expliquer qu'il serait **préférable de décomposer en** plusieurs lignes de calcul ;
- le professeur, lui, ne doit jamais proposer au tableau d'écrits incorrects sur le plan mathématique.

Dans la production 2,
 $3 \times 1 + 2 \times 2 + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

respecte les codes des écritures mathématiques, mais sa production exige de surmonter une difficulté importante au cycle 3.

Il vaut mieux donc inviter l'élève à écrire des calculs séparés.

$$3 \times 1 = 3$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 + 4 = 7$$

$$7 + 5 = 12.$$

Utilisation des parenthèses

- L'apprentissage ne débute qu'en cycle 3.
- Au cycle 2, la maîtrise du code des priorités opératoires n'est absolument pas un objectif.
- Il faut tout d'abord que les élèves s'approprient le sens de chacune des opérations.
- Lorsqu'ils doivent organiser des calculs mobilisant successivement deux opérations éventuellement identiques, l'utilisation de plusieurs lignes est à privilégier.

Textes de savoir

Différents types d'écrits doivent permettre à l'élève de **garder trace** de ce qu'il a appris en calcul en ligne :

- ses productions, et en regard une correction assortie de quelques mots d'explication de l'erreur dans le cas où elles sont erronées ; ces traces sont accessibles **dans un cahier** ;
- un écrit produit par l'élève ou par un groupe d'élèves **explicitant une stratégie de calcul à retenir** ; la formulation de ce type de texte peut-être provisoire et évolutive ;
- un texte construit dans la classe de façon collaborative, ou éventuellement un écrit proposé par le professeur, en synthèse d'un temps de travail.

Mémorisation de faits numériques

- Pour calculer, il faut au moins disposer d'un **répertoire de résultats connus** ou rapidement **reconstructibles** et de quelques **procédures « routinisées »**.
- Il est nécessaire de d'établir des **« ponts »** entre les résultats.
 - $8+5=13$ $13-5=8$
 - l'écart entre 15 et 3 est égal à 8
- Les relations entre ces résultats se mettent en place progressivement (et davantage au cycle 3)

2 types d'élèves sur la mémorisation des faits :

- Les « mémorisants » qui ont stocké en mémoire tout le répertoire additif et qui répondent de manière réflexe
- Les « reconstituteurs » qui n'ont stocké en mémoire qu'une partie du répertoire et qui reconstruisent plus ou moins rapidement le résultat en s'appuyant sur des résultats connus

ex : pour $7+8$, passent par $7+7=14$ et $14+1=15$

NB : Il est vain de vouloir obtenir de tous une mémorisation complète

Qu'est-ce que connaître ses tables ?

Par exemple pour « $7 + 6$ » :

- donner rapidement « $7 + 6 = 13$ »
- savoir ce qui manque à 6 pour faire 13 :
 $6 + \dots = 13$ ou $13 - 6 = \dots$
- savoir comment aller de 7 à 13 :
 $7 + \dots = 13$ ou $13 - 7 = \dots$
- connaître une décomposition de 13

Les conditions de mémorisation des tables

- **Compréhension de l'opération en jeu :**

L'élève est d'abord capable de calculer « quatre plus trois » parce qu'il est capable d'évoquer « quatre objets réunis avec trois objets » ou parce qu'il sait que le résultat est le nombre qui est situé « trois après quatre » sur la bande numérique, donc parce que l'**addition a du sens pour lui**. Il n'y a pas encore mémorisation et, pourtant, c'est la première étape de la mémorisation.

- **Prise de conscience de la nécessité d'un répertoire :**

Dans un premier temps, l'enseignant peut recenser des résultats au fur et à mesure qu'ils sont élaborés par les élèves (sans ordre déterminé), les noter sur une affiche et permettre aux élèves d'y avoir recours pour répondre à des questions, sans qu'il soit nécessaire de les reconstruire : il s'agit d'une **première étape vers la mémorisation**. Progressivement, ce répertoire est ensuite organisé, complété et structuré en tables.

Les conditions de mémorisation des tables

- **Capacité à élaborer les résultats connus pour en construire d'autres :**

« Quatre plus trois, c'est un de plus que trois plus trois ».
La mise en place de points d'appui est une étape décisive de la mémorisation.

- **Entraînement des résultats mémorisés :**

La mémorisation est favorisée par l'**entraînement** et, probablement, par la **diversité des représentations** mises en jeu.

Les doubles	Travaillée d'abord comme une comptine ou avec le jeu du furet de 2 en 2, la mémorisation des doubles des premiers entiers ne présente pas de difficulté majeure et est en général rapide. Il faut en entretenir la mémorisation et travailler la rapidité de restitution des résultats.	Faits numériques
Les amis pour faire 10 ou compléments à 10	C'est un passage obligé pour l'ensemble des activités numériques au cycle 2 et ultérieurement : il faut installer cette connaissance et l'entraîner tout au long du cycle.	Faits numériques
La numération	La difficulté tient au fait que le nom des nombres de onze à seize ne reflète pas leur écriture. Ce sont donc bien des connaissances qu'il faut installer, en automatisant la correspondance entre les trois formes de représentation des nombres : nom du nombre, écriture chiffrée, représentation analogique (collection...) comme cela se travaille à l'école maternelle pour les tout premiers nombres.	Faits numériques
Les « presque » doubles	<p>Une fois les doubles installés, il s'agit de trouver une stratégie pour déterminer les presque doubles en utilisant les connaissances travaillées précédemment (suivant, précédent, doubles). Deux stratégies peuvent émerger :</p> $6 + 5 = 6 + 6 - 1 = 12 - 1 = 11$ $6 + 5 = 1 + 5 + 5 = 1 + 10 = 11$	Procédure
Le passage par 10	<p>Il s'agit de construire une procédure s'appuyant sur une bonne connaissance des « amis pour faire 10 » ou « compléments à 10 ». Cette procédure sollicite également l'associativité de l'addition (et éventuellement la commutativité).</p> $9 + 7 = 9 + 1 + 6 = 10 + 6 = 16$	Procédure
Le surcomptage avec utilisation de la commutativité	Il s'agit de construire une procédure ayant recours au surcomptage +1, +2 et +3 avec utilisation de la commutativité « pour mettre le plus grand en premier ».	Procédure

Comment réaliser cet apprentissage ?

- La **répétition** (à condition qu'il ne soit pas le seul moyen utilisé)
- La façon dont a été réalisé la mémorisation (récitation de la comptine)
- Meilleure mémorisation quand on a compris, quand il y a du **sens** ou que cela a un intérêt pour soi.
- Meilleure mémorisation d'un **ensemble d'éléments structurés**, organisés entre eux (appui sur les doubles, passage à la dizaine, commutativité de l'addition ...)

Pourquoi faire du calcul en ligne ?

- construire puis travailler la **compréhension** de la notion de nombre et des propriétés de la numération décimale de position (ex : 26×12 en ligne pour éclairer le calcul posé de 26×12)
- développer la **connaissance des nombres** (richesse des décompositions)
- découvrir et utiliser les **propriétés des opérations**
- développer des **habiletés calculatoires**
- **construire** progressivement des **faits numériques** et des **procédures** élémentaires qui seront utiles pour mener des calculs posés et permettront de traiter des calculs (mentaux ou en ligne) plus complexes
- développer des **compétences dans le cadre de la résolution de problèmes**, par exemple au niveau du choix des opérations
- travailler le **sens des opérations**
- participer au développement des **six compétences opérationnelles**

Développement des 6 compétences opérationnelles

- **Chercher** : lorsque l'élève s'engage dans une démarche ; il teste plusieurs pistes, compare leur efficacité et s'engage dans l'une d'elles.
- **Représenter** : lorsque l'élève choisit une écriture d'un nombre entier ou décimal adaptée au traitement d'un calcul (décompositions, unités de numération, écriture fractionnaire, etc, ...) ou lorsqu'il passe d'une écriture à une autre. Utiliser une représentation pour traiter un calcul (dessin, schéma, arbre de calcul, diagramme, graphique, écritures avec parenthèses, ...) relève aussi de cette même compétence.
- **Raisonner** : lorsque l'élève choisit une démarche pour mettre en œuvre un calcul, compare un ordre de grandeur calculé et un résultat, vérifie ses résultats, organise des données numériques multiples ou combine plusieurs étapes de calcul, ...il mobilise la compétence « raisonner ».
- **Calculer** : cette compétence est mobilisée dans le calcul mental, en ligne, et posé; elle peut aussi l'être dans le calcul instrumenté lorsque une organisation réfléchie des calculs est nécessaire. Lorsqu'il fait des choix pour organiser un calcul et anticipe sur l'effet de ces choix.
- **Communiquer** : lorsque l'élève utilise à l'oral ou à l'écrit, le langage naturel ou des écritures symboliques (utilisation des chiffres pour écrire des nombres, utilisation des symboles $+$, $-$, \times , \div , $=$, etc, ..., utilisation de l'écriture décimale ou fractionnaire, etc, ...) pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements et présenter des calculs.

Comment enseigner le calcul en ligne ?

Une séquence en 4 étapes :

- 1) **découverte de nouveaux savoirs**, en particulier de nouvelles procédures de calcul, explicitation de ces savoirs visant l'élaboration d'une trace écrite ;
- 2) **appropriation et entraînement** régulier en vue de rendre les procédures disponibles pour l'élève ;
- 3) **réinvestissement** régulier ;
- 4) **évaluation**.

Etape 1 : explicitation

Ex: expliquer la construction des tables de + ou X,
expliciter une stratégie : + 9, x 20, x 200...

→ Production d'un écrit pour expliciter les stratégies

→ **Des séances sur un temps plus long (25 – 30 min)**

Etape 2 : Entraînement

- utiliser une règle déjà construite
 - restituer des résultats mémorisés
 - accroître la vitesse de restitution (faits/procédures)
- **Des séances courtes et fréquentes (15min)**

Etape 3 : Réinvestissement

Mobiliser les connaissances dans d'autres contextes: dans les problèmes, sur d'autres supports (jeux)

→ **Des séances de durée moyenne (20- 30 min)**

Etape 4 : Evaluation

En fonction des connaissances : varier les formes d'évaluation (ceintures, ...)

→ **Des séances de durées variables**

(5 – 15min)

+ Etape de révision

3 semaines après : faire le point et réinvestir ce qui a été vu

- Utilisation de situations de façon massée pour l'appropriation d'une procédure
- Utilisation de situations de façon filée pour favoriser le réinvestissement de diverses procédures.

Mises en commun

- Réaliser le **plus souvent possible** des mises en commun durant lesquelles les élèves peuvent **donner à voir** et **explicitement leurs démarches**, qu'elles soient correctes ou erronées, abouties ou non.
 - Le fait que les élèves écrivent ou présentent eux-mêmes la trace de leurs raisonnements (par exemple à l'aide d'un visualiseur) permet de **faire émerger toutes les erreurs et les difficultés**.
 - Dans le cas où l'élève n'a pas écrit sa démarche, l'enseignant traduit par écrit ce que dit l'élève, en veillant à **ne pas interpréter**.
- Le repérage des erreurs est essentiel et doit se poursuivre par la recherche de leurs causes

La différenciation

La différenciation peut concerner la **difficulté** des calculs ou bien le **temps imparti** pour les effectuer.

Ce qui importe avant tout c'est que les élèves puissent **s'évaluer et constater leurs progrès**, car le **sentiment de progresser** est un facteur essentiel de la **motivation**.