

Construction du nombre et calcul

CYCLE 1



Les 3 dimensions du nombre

Michel Fayol

- **La cardinalité** : l'invariance du cardinal
- **L'ordinalité et l'itération de l'unité** : les quantités s'ordonnent en fonction de leur cardinalité
- **Les transformations** : le cardinal varie en fonction des transformations ajouts et retraits

Le nombre, ça sert à quoi ?

- **Mémoriser** les quantités pour construire des collections « équipotentes » sans la présence explicite de la collection de référence
- **Comparer** les quantités, sans la présence explicite de celles-ci...
- Agir sur les quantités, sans la présence explicite de celles-ci (à les transformer, anticiper sur leur réunion, les partager)... donc à calculer !

Ce que les élèves savent à l'entrée en maternelle

D'importantes différences selon les enfants

- Discrimination des petits ensembles (subitizing)
- Discrimination approximative des grandes quantités (4 et plus)
- Connaissance hésitante des premiers noms de nombres et quelques chiffres arabes
- Attitudes et émotions en relation avec les nombres

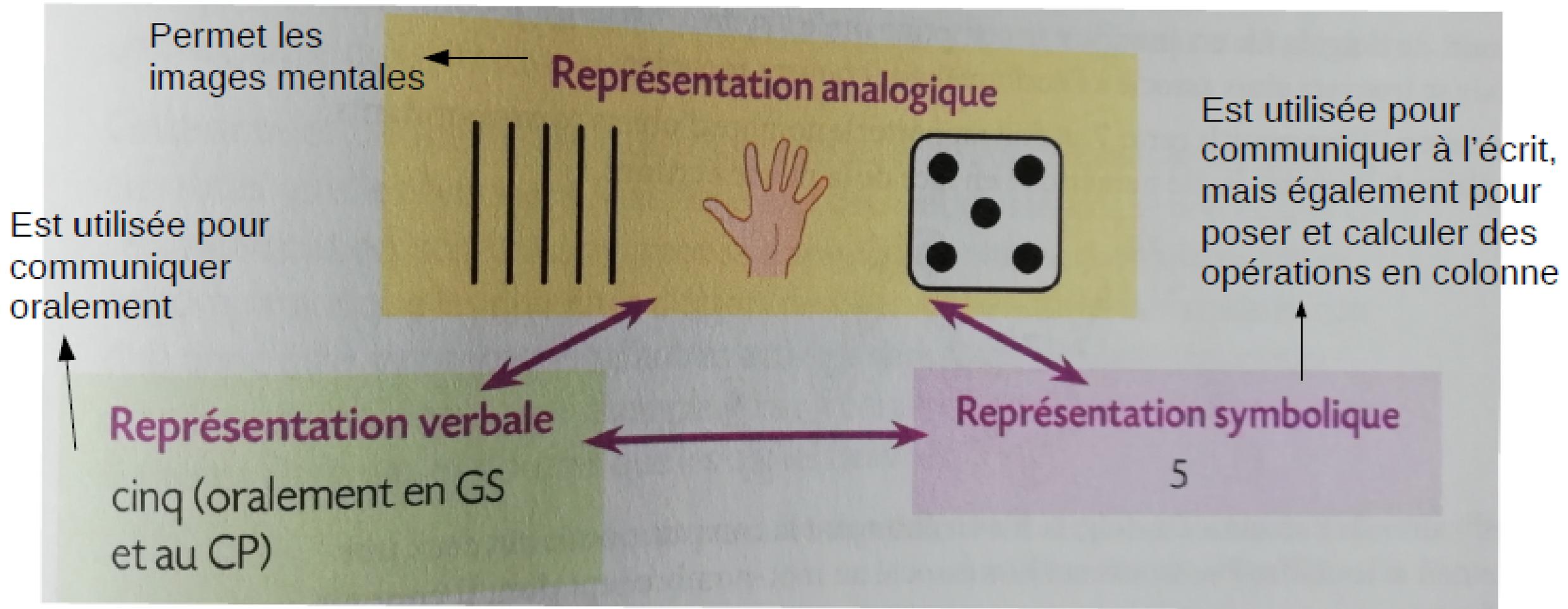
Ce qu'ils ne savent pas

- A quoi servent les nombres ?
- Dénombrer de manière précise
- Relier le nom des nombres aux quantités
- Composer décomposer
- Evoquer les quantités à partir du verbal ou du nom des nombres les utiliser en situation

But du cycle 1

Comment passer d'une capacité primitive la représentation analogique perceptive à une représentation codée (passage de l'intuitif à un traitement précis)?

Modèle du triple code de Stanislas Dehaene et Laurent Cohen



La cardinalité

Expression et mémoire de la quantité d'objets contenus dans une collection

« Comprendre la notion de quantité implique pour l'enfant, de concevoir que la quantité n'est pas la caractéristique d'un objet mais d'une collection d'objets. L'enfant doit également comprendre que le nombre sert à mémoriser la quantité. » BO n°2 du 26 mars 2015

Le cardinal peut s'obtenir par :

- Correspondance terme à terme
- dénombrement

La correspondance terme à terme

La reconnaissance de l'équivalence numérique (cardinal) est d'autant plus facile chez les plus jeunes que :

- Les entités se ressemblent
- La position spatiale est proche
- Les enfants connaissent la suite conventionnelle du nom des nombres mais dans cette phase le nom des nombres est secondaire



QUE FAIRE?

- Nombreuses activités de mise en correspondances avec des entités différentes en taille, couleurs, fonctions, simultané versus successif, visuel, tactile
- Variation des dispositions, des regroupements, des entités, des surfaces occupées
- **Collection témoin de doigts** (contribution à l'abstraction progressive du cardinal)
- **Prévoir des séances récurrentes, quotidiennes avec des activités brèves et variées**



EXEMPLE DE CARDINALITE

Situation évolutive :

La famille d'ours : papa , maman, les enfants, les grands parents.....

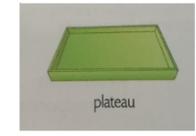
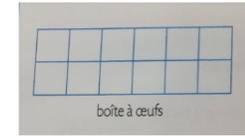
Ils ont besoin des assiettes, des verres...

Ils vont se promener en voiture, 4 personnes peuvent monter dans une voiture ... (composition, décomposition)



★ Créer des situations problèmes intéressantes pour comprendre la nécessité d'utiliser les mots nombres

Exemple : les boîtes à œufs
de la PS au CP



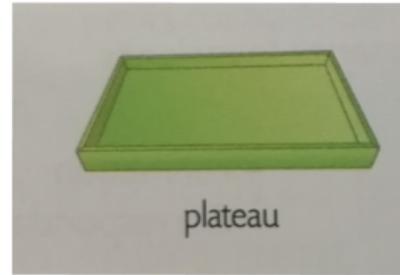
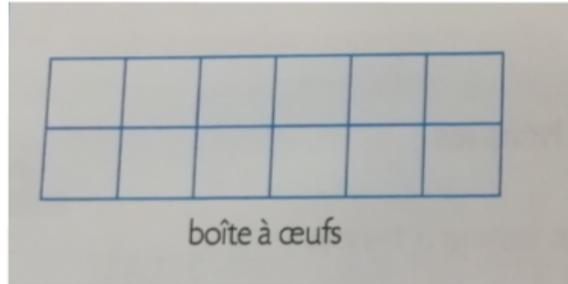
Consigne : « Remplir la boîte avec les châtaignes. »

3 étapes pour faire évoluer la situation de référence
(*Claire Margolinas/ Françoise Wozniak : le nombre à l'école maternelle*)

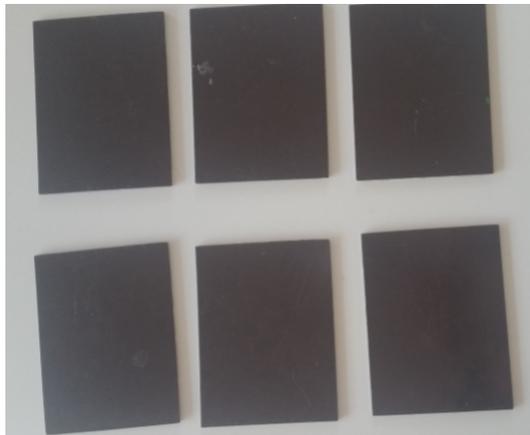
- Eloignement dans l'espace
- Eloignement dans le temps (codage de la quantité)
- Communication à autrui (utilisation du nombre écrit)

Exemple de l'alimentation des animaux : nourrir le requin avec des petits poissons ou expérience de C. Margolinas les œufs et les coquetiers.

Remplir la boîte avec les châtaignes progression de la PS à la GS



Ranger les voitures dans les garages. Consigne : « tu dois aller chercher juste ce qu'il faut de voitures pour remplir les garages en un seul déplacement. »



Le dénombrement

Coordination de la mise en œuvre de 2 composantes
sources potentielles de difficultés

- **Composante motrice** (pointage, mouvement des yeux)
- **Composante symbolique** (nom des nombres, chiffres arabes, formes signées)
- Coordination entre les deux

Le dénombrement les procédures : les principes de GELMAN



1. Le principe de l'énumération



L'énumération : Qu'est-ce que c'est?

Procédure, stratégie pour énoncer, passer en revue : une à une les parties d'un tout; un à un les éléments d'une collection, d'un ensemble.

L'énumération : une procédure à maîtriser

Intervient dans de très nombreuses situations relevant des mathématiques mais aussi d'autres domaines.

- Il existe deux types de configurations : modifiables (manipulation possible des objets) ou non modifiables (objets représentés sur une fiche).
- Les connaissances des procédures d'énumération ne sont pas toujours reconnues comme utiles donc pas formulées, validées, mémorisées...

2. Le principe de suite stable

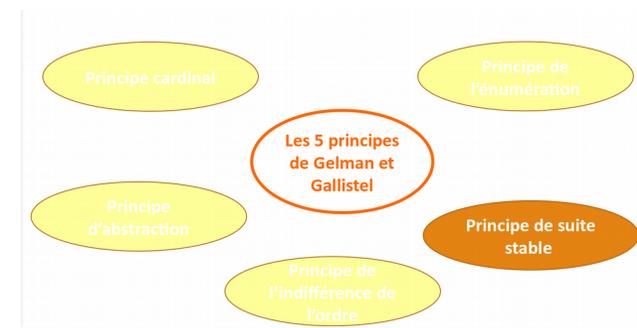
Les mots nombres doivent être récités dans un ordre stable (un, deux, trois...)

La comptine numérique s'acquiert entre 2 et 6 ans mais avec de fortes variations d'un enfant à l'autre

4 niveaux de développement

- **Niveau chapelet** : la suite faite de mots non différenciés
- **Niveau chaîne insécable** : la suite ne peut être récitée qu'en partant d'un
- **Niveau chaîne sécable** : la suite peut-être récitée en avant à partir de n'importe quel nombre et il commence à pouvoir compter en arrière
- **Niveau chaîne terminale** (vers 6 -7 ans) : le comptage en avant et en arrière est automatisé à partir d'un nombre ou pour aller d'un nombre à un autre

La connaissance de la chaîne verbale ne garantit pas que les enfants sachent s'en servir



Toutes les comptines ne se valent pas.

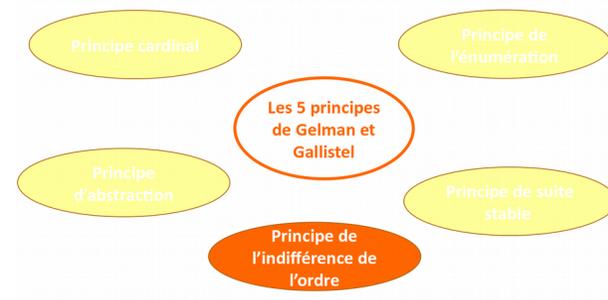
| | |
|--|--|
| 1,2,3 Dans sa hotte en bois 4,5,6 Tout plein de surprises 7,8,9 Des jouets tout neufs 10,11,12 Du bonheur pour tous ! | Que fit le cinquième ? Le premier m'a dit : « Viens par ici. » Le deuxième cria : « Viens donc par là ! » Le troisième chanta : « Mais non, c'est là-bas ! » Et que fit le cinquième ? Il me donna un poème ! |
|--|--|

Comptines qui incitent à numéroté :
à éviter!

| | | | |
|---|--|--|---|
|  1 petit lapin... | Les petits lapins 1 petit lapin sur le chemin rencontre un autre petit lapin... 2 petits lapins sont devenus copains ! 2 petits lapins sur le chemin rencontrent un autre petit lapin... 3 petits lapins sont devenus copains ! | 3 petits lapins sur le chemin rencontrent un autre petit lapin... 4 petits lapins sont devenus copains ! 4 petits lapins sur le chemin rencontrent un autre petit lapin... 5 petits lapins sont devenus copains ! J'ai 5 doigts sur ma main pour compter les petits lapins ! 1, 2, 3, 4, 5 ! |  3 petits lapins... |
|  2 petits lapins... | | |  4 petits lapins... |
| | | |  5 petits lapins. |

Comptines qui invitent à décomposer :
à privilégier!

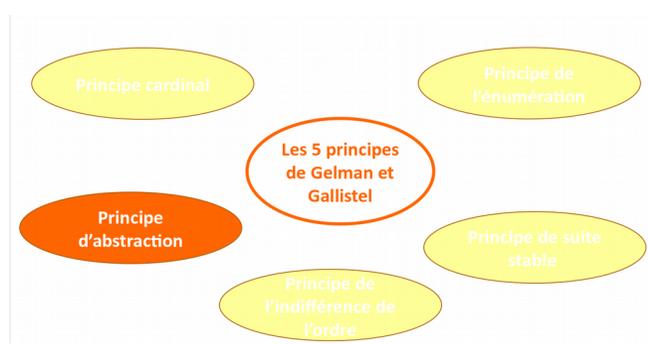
3. Le principe de l'indifférence de l'ordre



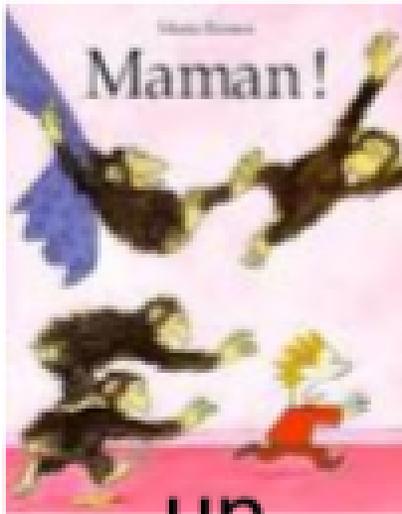
Les objets peuvent être comptés dans n'importe quel ordre.



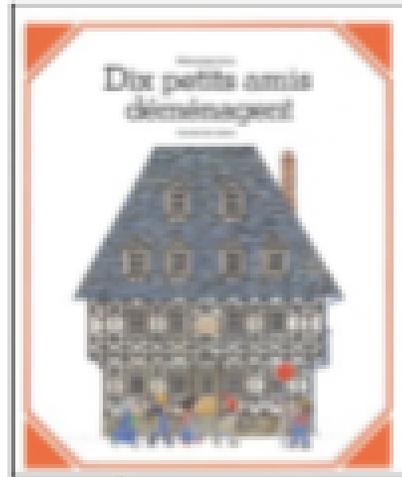
4. Le principe d'abstraction



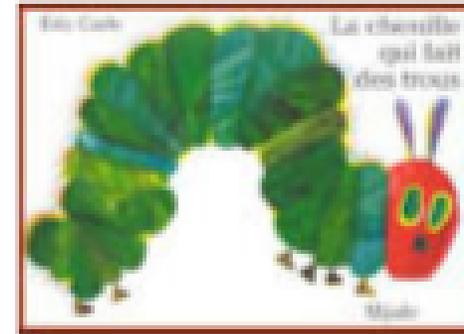
La nature des objets à compter n'a pas d'importance.



un



deux

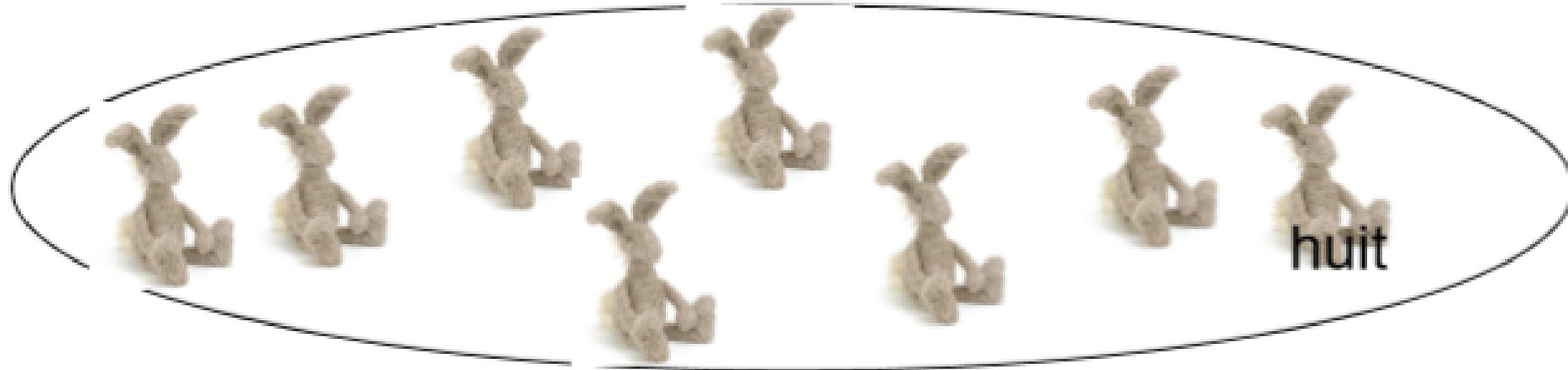


trois

5. Le principe cardinal



Le dernier mot prononcé réfère à l'ensemble.

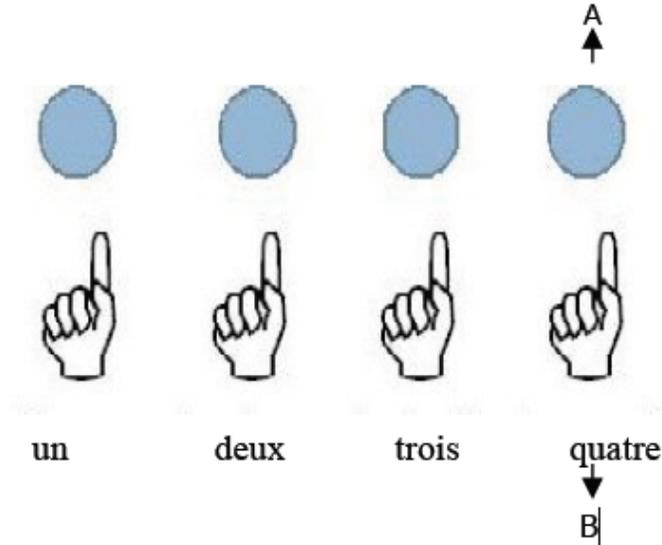


Le comptage-numérotage

Apport de la recherche depuis 2008 (Rémi Brissiaud)

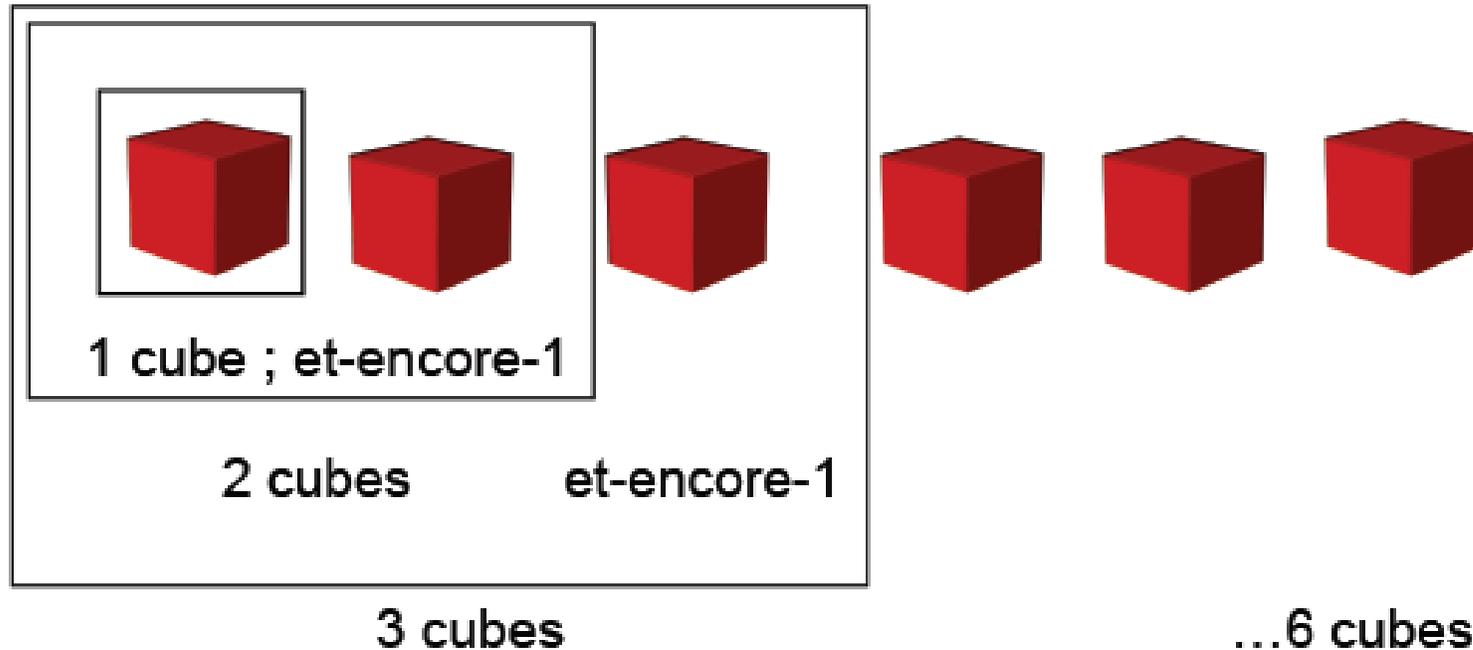


OBSTACLE ! Confusion entre la représentation de la quantité par une collection de numéros et l'accès au nombre



Le comptage-dénombrément

Rôle fondamental pour accéder à l'itération de l'unité

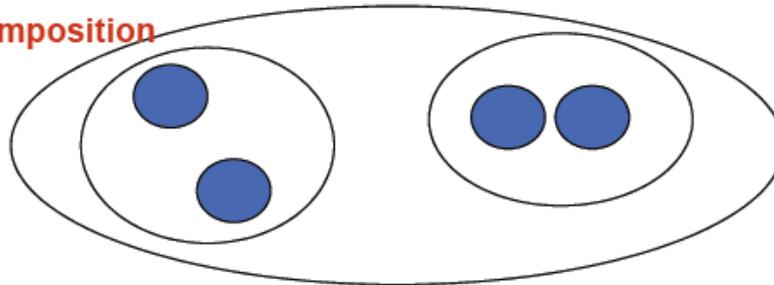


Le comptage-dénombrément

Rôle fondamental pour accéder aux stratégies de compositions et décompositions.

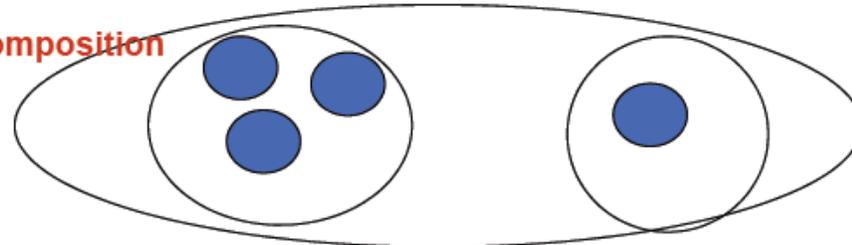
2 et encore 2 : c'est 4

composition



4 c'est : 3 et encore 1

décomposition



Tout au long du cycle 1

La notion de cardinal est complexe

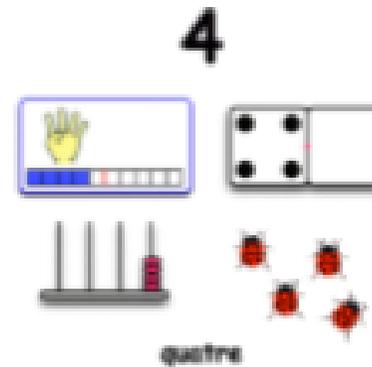
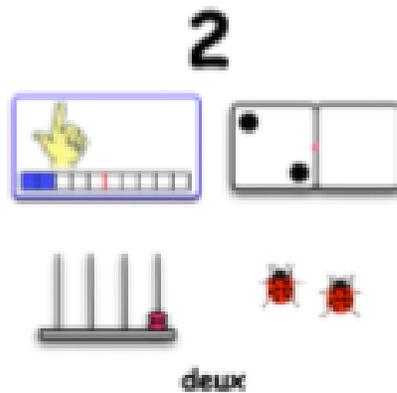
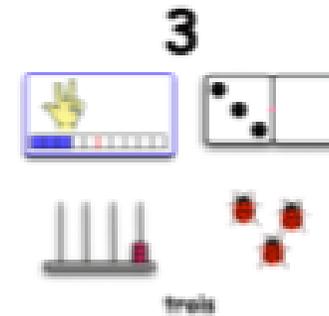
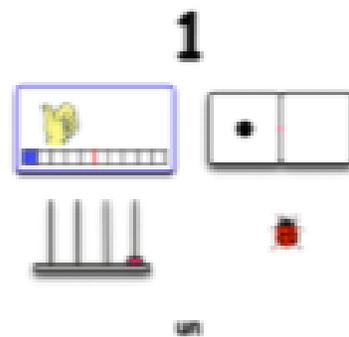
Nécessité de travailler **tous les jours** , des séances **récurrentes** avec des **activités brèves et variées**.

D'abord les petites quantités (1 à 3) puis les quantités moyennes (4 à 6-7) puis les grandes quantités (7 à 10 voir 12) associées les quantités aux symboles (analogiques et abstraits) puis sans symboles

Composition décomposition, comparaison et usage des doigts et des collections témoins

Aboutissement : affichage de la classe

Différents codes analogiques et symboliques



L'ordinalité

« Le nombre permet également de conserver la mémoire du rang d'un élément dans une collection organisée.

Pour garder en mémoire le rang et la position des objets (troisième perle, cinquième cerceau), les enfants doivent définir un sens de lecture, un sens de parcours, c'est-à-dire donner un ordre.

Cet usage du nombre s'appuie à l'oral sur la connaissance de la comptine numérique et à l'écrit sur celle de l'écriture chiffrée. »

Programmes 2015

L'ordinalité : le nombre comme mémoire de position

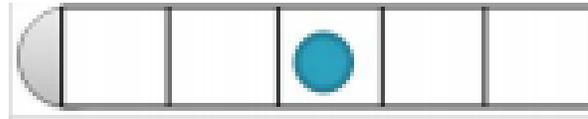
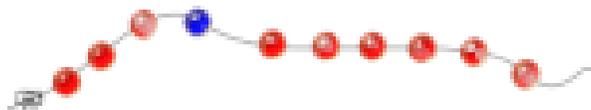
Expression et mémoire de la position :

- fait référence à une liste ordonnée
- permet d'attribuer une position
- un repère de départ est nécessaire

L'enseignant doit mettre en œuvre ces situations dans lesquelles la notion d'ordre et de position a un sens.

Dans ces situations d'action, il faut mettre en jeu l'éloignement dans l'espace, dans le temps, la communication à autrui.

Enseigner le nombre comme mémoire de position demande de s'appuyer sur un milieu matériel qui comporte des files ayant une origine, une orientation et un rang.



Expérimentations : phase d'éloignement dans le temps et de communication à autrui.

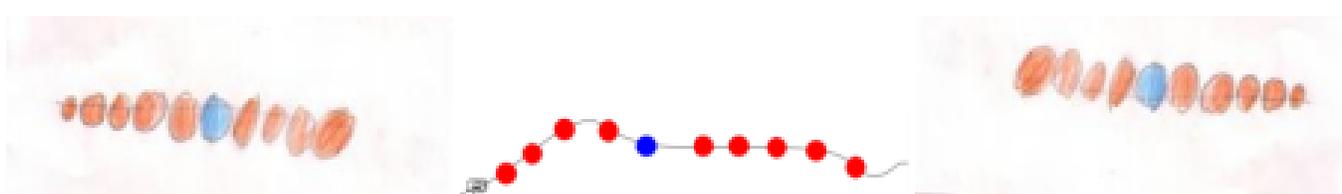


Figure 5 : suivant la façon dont le dessin est lu, il correspond ou non au modèle

Dans la phase suivante (communication à autrui), de nombreux élèves produisent un schéma qui comporte une origine et un sens (figure 6).



Figure 6 : un dessin complet

Progressivité possible :

- 1) L'enfant doit savoir comprendre les nombres ordinaux à l'oral.*
- 2) Amener l'enfant à les utiliser lui même pour se faire comprendre.*
- 3) Passer à l'abstraction, représenter une file ordonnée et la verbaliser.*

La ligne numérique

Amener les enfants à apprendre à situer l'ordinalité en tenant compte du cardinal et des relations des nombres entre eux

Illustration par un exemple de rituel

Rituel mathématiques-construction du nombre suite à un jeu opposant 2 équipes : les filles et les garçons

Classe de MS-GS

Illustration par un exemple de rituel

- Comptabilisation des points de chaque équipe (garçons : 5 et filles : 4)
→ dénombrement par comptage numérotage
- Phrases mathématiques :
 - “les garçons ont plus de points que les filles parce que 4 est plus petit que 5.”
 - “si on enlève 1 point aux garçons, ça fait égalité.”
 - “si on rajoute, avec le 4, encore un bâton, ça fait 5 et c’est égalité.”
 - “si on enlève 1 point aux filles c’est les garçons qui gagnent parce que 3 c’est moins que 5.”
- Vérification par comptage-dénombrement, par itération : 1 et encore 1

LES RESOLUTIONS DE PROBLEMES : LES TRANSFORMATIONS

Le nombre que ce soit d'un point de vue ordinal ou cardinal se construit au travers des résolutions de problèmes

Le cardinal peut varier en fonction des transformations ajouts et retraits, comparaison, distribution, partage

Définition d'un problème (Jean Brun – Chercheur INRP)

- Une situation initiale avec un but à atteindre
- Une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but
- Un rapport sujet/situation la solution ne doit pas apparaître d'emblée

Résolutions de problèmes : les étapes



COMPRENDRE LE
PROBLÈME



CONCEVOIR UN
PLAN



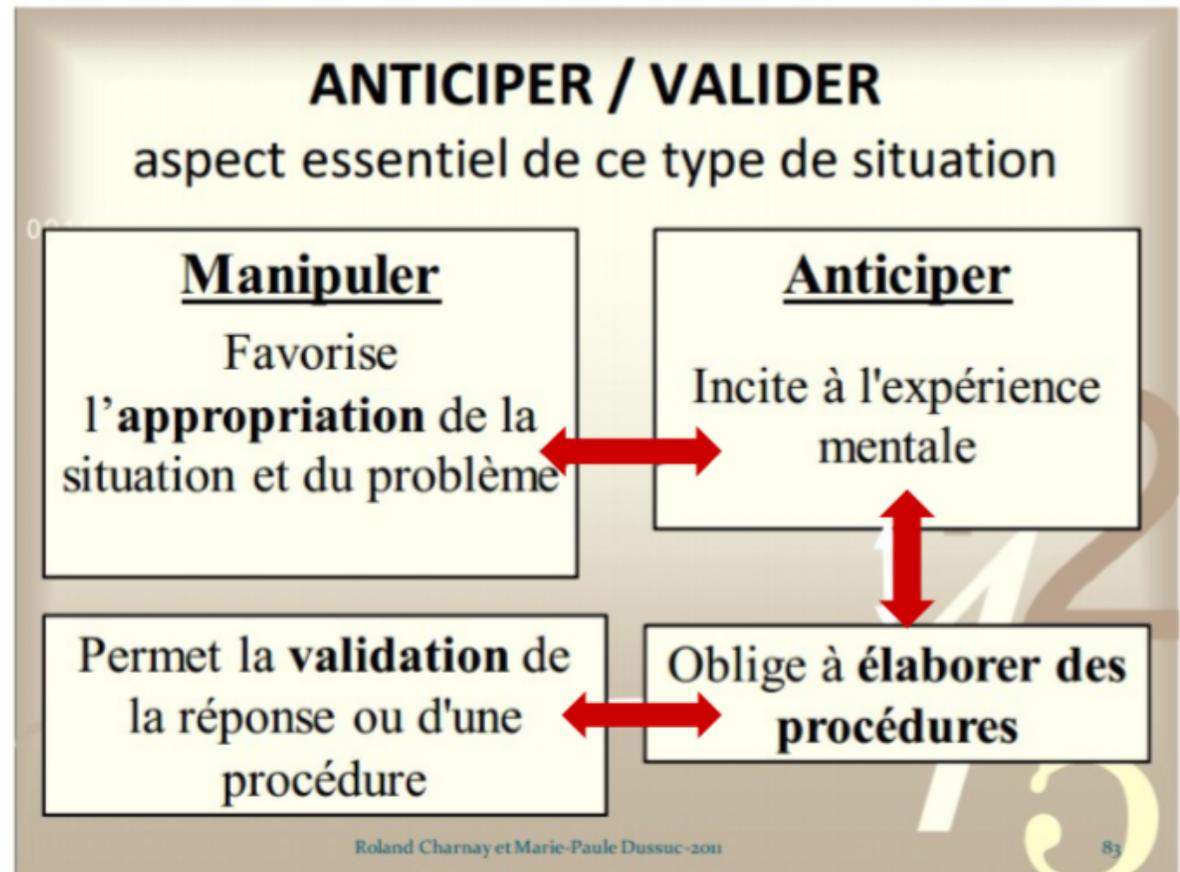
METTRE LE PLAN
À EXÉCUTION



EXAMINER LA
SOLUTION
OBTENUE

Résolutions de problèmes : les points de vigilance

- Manipuler
- Verbaliser
- Anticiper
- Observer



MANIPULER/ANTICIPER

Manipuler

Claire MARGOLINAS Conférence du 13/11/2018

«A l'école, les mathématiques sont le domaine dans lequel la confrontation au réel joue un rôle crucial dans les apprentissages. Il y a forcément une confrontation au VRAI/FAUX.

En mathématiques, l'élève doit pouvoir manipuler, il doit pouvoir se tromper. Il n'y a pas une seule procédure experte, il faut essayer, chercher et accepter différentes démarches. »

Il faut amener l'enfant à se libérer progressivement des actions matérielles.

La manipulation est indispensable MAIS pour être efficace elle doit toujours être contrainte et à un moment empêchée.

Partir de situations non verbales pour aller vers des situations verbales

Exemple du rôle de la manipulation :



Quand tout le monde a donné sa réponse, le maître, ou un élève, sort les briques une à une et les compte à haute voix devant toute la classe.

7 briques bleues
6 briques rouges
combien de briques?

« Dites-moi combien il y a de briques dans la boîte. »



- Les briques posées dans la boîte permettent une validation du résultat
 - pas de validation par le maître. Il ne s'agit pas de deviner ses attentes.
- Quand un élève décrit sa méthode, le résultat est connu d'avance. Ils ne s'attendent pas à savoir si ils « ont bon ». Ils peuvent donc se consacrer à la compréhension de la méthode qui leur est explicitée.
- Il ne s'agit pas alors de calcul, mais cela permet de déterminer le nombre d'objets et donc d'**anticiper** le résultat.

→ **c'est bien là une des fonctions essentielles des mathématiques !**

Résolutions de problèmes : les différentes situations

- Rituelles (ex tour d'appel)
- Fonctionnelles (coins jeux, vie quotidienne)
- Construites

Les 7 points de vigilance selon Goigoux

- 1) Les enfants peuvent éprouver du plaisir à effectuer un travail même difficile
- 2) On ne doit pas forcément enjoliver les activités pour les rendre plus motivantes
- 3) Les paramètres des tâches ne doivent pas varier trop rapidement
- 4) L'activité de l'élève ne se résume pas à la manipulation. L'important n'est pas de faire mais de faire comprendre.
- 5) La réussite peut s'exercer au détriment de la compréhension
- 6) Le langage n'est pas qu'un outil de communication. Il doit devenir un instrument de pensée, un outil pour apprendre.
- 7) Éviter la confusion entre langue et langage.

POUR CONCLURE / QUELQUES OBJECTIFS

- Inutile d'aller vite et loin assurer la consolidation des bases :
activités quotidiennes et brèves
- **Dénombrer** sans erreur jusqu'à 10 ou 12. **Composer, décomposer** toutes les quantités jusqu'à **10 ou 12**.
- Traiter des **situations problèmes** non verbales puis verbales, perceptivement présentes puis évocables,
- **Passage aux chiffres arabes**
- Ne pas surestimer les capacités, donner confiance, bienveillance mais exigence, prévenir l'anxiété

POUR CONCLURE : Il est important

- d'enseigner les **deux aspects du nombre** : **cardinal** et **ordinal** en proposant des situations qui posent problème
- d'**observer les procédures** des enfants
- de « lâcher prise » pour laisser les enfants **chercher et se tromper** sans donner la réponse
- de considérer la **consigne** comme une **sollicitation** mais pas comme une manière de procéder
- de faire **verbaliser les stratégies**
- de soigner les moments de vérification et **mettre en évidence ce qui fait réussir**
- de soigner les moments **d'institutionnalisation** du savoir