III

Résolution de problèmes et modélisation

Au cycle 2, les programmes placent « *la résolution de problèmes au centre de l'activité mathématique des élèves* » et précisent que « *les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements* ». La résolution de problèmes doit débuter dès le début de l'année de CP et reposer sur un travail régulier et structuré. Il est important de ne pas différer cet enseignement et de ne pas le corréler à l'autonomie en lecture des élèves.

Ce chapitre vise à clarifier la démarche d'enseignement permettant aux élèves d'apprendre à résoudre des problèmes, notamment à travers la modélisation, tout en l'inscrivant dans la perspective plus large de ce travail mené tout au long du cycle 2.

Introduction

La lecture des programmes met en évidence un triple objectif autour des problèmes :

- apprendre aux élèves à résoudre des problèmes ;
- aborder de nouvelles notions (numération décimale, sens des opérations, langage mathématique) et consolider ces acquisitions ;
- développer les capacités des élèves à chercher, raisonner et communiquer, c'est-à-dire à acquérir des compétences potentiellement transférables.

Au regard de la note de service n° 2018-050 (BOEN n°3, 2018), il s'agit prioritairement de mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes. On débutera cet enseignement dès le début du CP à partir des premiers jalons posés en maternelle.

Cela nécessite[32] de conduire, année après année, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— comprendre le problème posé ;
— établir une stratégie pour le résoudre (en faisant par exemple des analogies avec un modèle connu, en décomposant ou recomposant le problème en sous-problèmes, en s'appuyant éventuellement sur des outils auxiliaires, par exemple un schéma ou un tableau, en faisant des essais, en partant de ce que l'on veut trouver) ;
— mettre en œuvre la stratégie retenue ;
— revenir sur la solution et prendre du recul sur leur travail.

Les attendus de fin de CP à propos de la résolution de problèmes

Les attendus de fin d'année de CP fixent ce que les élèves doivent savoir faire et constituent des éléments pour envisager la progressivité des apprentissages pour ce domaine des mathématiques. Concernant la résolution de problèmes, cela peut se résumer dans le tableau suivant :

CHAMP ADDITIF	CHAMP MULTIPLICATIF
– Résoudre des problèmes additifs et soustractifs en une ou deux étapes ; – Modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques ; – Connaître le sens des signes « + » et « – ».	– Résoudre des problèmes de multiplication ou de division, en une étape, sur des petits nombres, avec le recours à la manipulation.

Partant des connaissances et compétences attendues, la réflexion engagée dans ce chapitre se centrera sur :

— les fondamentaux de la démarche d'enseignement de résolution de problèmes ;
— les enjeux de la résolution et de la modélisation avec, en particulier, l'introduction progressive de schémas calculatoires, le continuum didactique tout au long du cycle 2 ;
— les traces écrites et l'importance de l'institutionnalisation.

32 — Voir George Pólya, « La découverte des mathématiques », 1969 : https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1969_num_6_1_1972_t1_0059_0000_2

De quels problèmes parle-t-on ?

La catégorisation des problèmes ne constitue pas une fin en soi, ni une priorité, pour aborder l'enseignement de la résolution de problèmes, en particulier du côté de l'élève.

Selon le point de vue adopté par les chercheurs, les catégorisations varient fortement. Certaines de ces catégorisations peuvent d'ailleurs être des éléments mettant inutilement en difficulté les professeurs, que ce soit par la complexité de leur formalisme ou dans la description détaillée de nombreuses sous-catégories.

Des recherches récentes en didactique[33] ont permis de définir trois types de problèmes.

LES PROBLÈMES BASIQUES (ÉLÉMENTAIRES)

Cette catégorie recouvre par exemple les problèmes à deux données où il s'agit d'en déterminer une troisième, ou des problèmes qui peuvent être résolus, à partir de données fournies explicitement dans l'énoncé, à l'aide d'un seul type d'opération : l'énoncé est court, la syntaxe simple, sans information superflue, le contexte facile à comprendre. **Il s'agit essentiellement de problèmes arithmétiques à une étape.**

Une grande variété de tels problèmes sera proposée aux élèves en vue d'analyser avec eux **leurs ressemblances**. À terme, une résolution aisée de ces problèmes est attendue ; ce seront les éléments « simples » constitutifs du raisonnement et mobilisés dans la résolution des problèmes complexes. La schématisation jouera à ce titre un rôle prépondérant, comme nous le verrons plus loin, relativement à la construction et l'identification par les élèves d'analogies entre les différents problèmes basiques.

Exemple de problème basique en CP : « *Il y a 36 oiseaux dans l'arbre, 21 oiseaux s'envolent. Combien en reste-t-il ?* »

LES PROBLÈMES COMPLEXES

Ce sont des « agrégats de problèmes basiques ». La résolution des problèmes complexes va nécessiter plusieurs étapes.

Catherine Houdement note que « *la complexité des problèmes peut venir de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour élaborer la réponse* »[33]. La construction et la connexion des informations, nécessaires à la résolution, sont à la charge de l'élève. Cela impose, d'une part, d'identifier et de savoir résoudre les problèmes basiques sous-jacents et, d'autre part, de mobiliser des compétences supplémentaires : connecter les informations pour construire le (les) sous-problème(s) basique(s).

La résolution des problèmes complexes permet au professeur de s'assurer plus solidement des connaissances et des compétences acquises par les élèves. Elle permet de tester la disponibilité des connaissances et favorise un retour sur les problèmes basiques. La construction des compétences en résolution de problèmes arithmétiques se fait de manière dialectique, par allers-retours entre les problèmes basiques et les problèmes complexes.

33 — Voir Catherine Houdement, « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école », revue *Grand N*, n° 100, p. 59-78, 2017.

Les programmes (BOEN n°3, 2018) précisent qu'il est important de proposer des problèmes à deux étapes dès le début du cycle 2.

Exemple de problème complexe en CP : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums jeunesse, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y a-t-il de livres documentaires ?* »

LES PROBLÈMES ATYPIQUES

Ces problèmes, appelés aussi « *pour apprendre à chercher* », visent l'inventivité stratégique et la prise de risque. Ils sont « *définis par leur caractère non routinier ; les élèves ne disposent pas de stratégies connues a priori pour les résoudre* »[34]. Ils doivent procéder à une phase de recherche plus marquée s'appuyant sur la mémoire de problèmes et la mobilisation des acquis.

Ces problèmes relèvent de stratégies spécifiques, ce qui permet de les particulariser auprès des élèves par rapport aux problèmes basiques. Ces problèmes mettent en jeu des stratégies attendues particulières[35] qu'il convient, selon le niveau d'enseignement, d'expliciter pour développer des compétences transférables. Ils peuvent ainsi constituer un travail spécifique qui est à conduire en parallèle des autres problèmes.

Exemple de problème en CP : « *On veut habiller des clowns avec des costumes constitués d'un chapeau et d'un pantalon. Les chapeaux peuvent être rouge, jaune ou vert. Les pantalons peuvent être bleu, orange, marron ou noir. Combien de costumes peut-on constituer ?* »

« *Les frontières entre les 3 types de problèmes sont mouvantes et ne constituent pas des absolus bien définis* »[36]. Par exemple, un problème de partage, atypique en CP, peut devenir basique en CE2.

Enfin, un problème complexe peut être considéré par un élève comme basique dès lors qu'il sait le résoudre en sautant implicitement des étapes.

POINT DE VIGILANCE

Les problèmes arithmétiques élémentaires et complexes forment l'essentiel du travail de résolution de problèmes à l'école élémentaire.

La suite de ce chapitre sera consacrée à la résolution de problèmes élémentaires et complexes.

34 — *Ibid*, p. 80, note 33.
35 — Par exemple, classer selon un critère des objets pour pouvoir les dénombrer, utiliser un graphe pour raisonner, utiliser le principe du tiers exclu qui exprime que s'il y a deux choix, exclure l'un oblige à choisir l'autre. Ce dernier raisonnement intervient très souvent à l'école primaire de manière implicite, lorsqu'on dit par exemple « ces personnes ne sont pas des adultes, donc ce sont des enfants ».
36 — *Ibid*, p. 80, note 33.

Les fondamentaux de la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes (maternelle/cycle 2)

Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

L'accès à l'abstraction est un long processus. En mathématiques, ce processus fondamental est associé à la maîtrise d'un langage symbolique et des compétences de haut niveau que sont le raisonnement et la modélisation, convoquées dans la résolution de problèmes.

Abstraire correspond à l'opération mentale qui consiste à isoler une (ou plusieurs) propriété(s) d'un objet afin de la (les) considérer pour elle(s)-même(s). Cela nécessite donc de se détacher du réel, du contexte dans lequel on a manipulé et/ou représenté l'objet.

L'abstraction prend appui sur trois étapes concomitantes essentielles, la manipulation, la représentation et la verbalisation, qui permettent le passage progressif vers l'abstraction.

LA MANIPULATION

La manipulation consiste à agir sur des objets tangibles (par exemple des cubes) ou symboliques (par exemple des nombres). Cette étape passe par l'action. Pour l'élève qui n'a qu'une expérience encore limitée des objets mathématiques, il s'agit d'apprendre « par le faire » dans des situations qui mobilisent du matériel.

Cependant, il est important de distinguer la manipulation passive de la manipulation active vis-à-vis d'un apprentissage mathématique visé. En effet, la manipulation permet à l'élève de s'approprier la situation, de s'en faire une première représentation. Mais cette première phase n'est pas suffisante : cette étape doit également conduire à une anticipation d'une solution au problème.

L'exemple ci-contre illustre ce qui distingue la manipulation passive de la manipulation active.

MANIPULATION PASSIVE ET MANIPULATION ACTIVE :

EXEMPLE AVEC LA SITUATION DE LA BOÎTE[37]

Manipulation passive : le professeur dispose **A** jetons dans la boîte, puis **B** jetons et pose la question du nombre total de jetons dans la boîte. Les élèves ont accès au contenu de la boîte et peuvent se contenter de lire le résultat en recomptant les jetons.

Manipulation active : le professeur montre successivement les deux collections de jetons et les place dans la boîte, la referme et pose la question. Dans ce cas, l'élève va mobiliser des représentations mentales et ses connaissances sur les nombres, ainsi que des procédures de plus haut niveau pour résoudre le problème.

La manipulation n'est donc pas une finalité mais une étape intermédiaire permettant d'engager un travail cognitif. Le matériel change progressivement de statut ; de matériel pour constater, observer, il devient matériel pour valider ce qu'on est capable d'anticiper. Il permet de raisonner sur les procédures.

DE LA MANIPULATION À LA REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE

Cette étape est fondamentale dans la résolution de problèmes : elle convoque la représentation imagée qui amène à se représenter quelque chose sans l'avoir sous les yeux. Il peut s'agir de représenter par une image, un dessin, une photo, un pictogramme, un schéma, etc. L'action est transformée en image mentale.

Les représentations sont d'abord proches de la réalité du problème (représentation des objets tangibles), puis elles évoluent progressivement vers des représentations plus abstraites et génériques telles que les schémas ou l'écriture mathématique. Toutes ces représentations ne se valent pas et n'ont pas la même portée, notamment dans la résolution de problèmes.

37 — La situation de la boîte, une situation de référence du champ additif au CP (cf. chapitre 2, p. 53).

L'exemple suivant illustre la progressivité, au niveau de la maternelle et au CP :

« *Au supermarché, j'ai acheté 4 pommes rouges et 2 pommes vertes. Combien ai-je de pommes dans mon panier ?* »

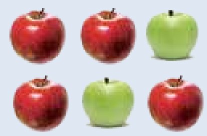
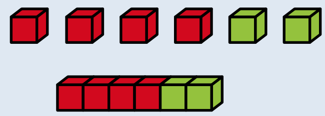
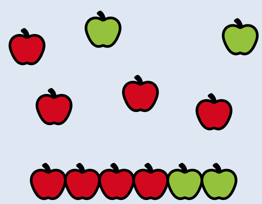
MODE SENSORI-MOTEUR[38]	**Manipulation d'objets tangibles proches de la réalité :** 	**Manipulation d'objets tangibles figuratifs :** 
MODE IMAGÉ	**Représentations imagées des objets tangibles proches de la réalité :** 	• **Représentation avec un schéma :**  • **Représentation présymbolique (schéma en barres + écriture symbolique) :** 
MODE SYMBOLIQUE	**Écriture en langage mathématique :** 4 + 2 = 6	

Figure 19. Progression des représentations.

La représentation présymbolique proposée par l'enseignant, sous forme de rectangles dans lesquels sont inscrites les valeurs numériques de l'énoncé[39] ont une portée plus vaste qui sera décrite dans le paragraphe intitulé « Problèmes arithmétiques au CP et au cycle 2 : la modélisation pour aider à résoudre des problèmes », p. 89), relatif à la modélisation.

L'écriture mathématique, qui traduit de manière symbolique la situation rencontrée, s'introduit progressivement (cf. chapitre 2).

38 — Jerome Bruner, dans *The Relevance of education* (1973), emploie les termes respectifs « ***mode énactif*** », « ***mode iconique*** » et « ***mode symbolique*** ».

39 — Le respect d'une proportion relative entre la longueur des rectangles et des nombres correspondants ne peut être un exigible en cycle 2. Cependant quelques points d'évidence s'imposent : la grande quantité doit être représentée par un rectangle plus grand.

Lien avec la maternelle et importance du matériel

Les enjeux pour l'école maternelle sont doubles. Il s'agit d'une part d'installer des attitudes préparant à la résolution de problèmes, attitudes qui mobilisent les actions « *anticiper, choisir, décider, essayer, recommencer, s'interroger sur la validité de la réponse proposée* » (BOEN du 29 mai 2019), et d'autre part d'utiliser les connaissances sur les nombres pour résoudre des problèmes.

Les problèmes en maternelle sont définis comme « *des situations dans lesquelles la réponse n'est pas d'emblée disponible* » ; ils doivent permettre de « *trouver une quantité donnée d'objets,* [de donner] *le nombre nécessaire d'objets pour compléter une boîte dont le nombre de cases est donné ou connu* [...] *Les activités d'apprentissage proposées s'appuient sur un matériel varié* [...] *permettant la manipulation de quantités tangibles* » (BOEN du 29 mai 2019).

Le fait de pouvoir agir ou non sur les objets (les déplacer ou non) constitue une première étape vers une manipulation mentale et provoque la nécessité d'anticiper la réponse lorsque les objets sont absents ou éloignés. Ces situations feront l'objet d'une reprise à l'entrée du CP.

Les situations d'apprentissage liées à la résolution de problèmes seront répétées autant que nécessaire ; elles contribueront à constituer une première mémoire de problèmes et à installer une culture scolaire de la résolution de problèmes. Il s'agit donc de penser cette articulation entre école maternelle et CP.

Afin de préparer les élèves de maternelle à accéder à ces représentations, le matériel tangible devra être progressivement remplacé par des objets manipulables moins figuratifs, comme des cubes emboîtables (cf. chapitre 4, paragraphe intitulé « Cubes emboîtables sécables », p. 108).

Les situations dans lesquelles une commande « écrite » est nécessaire peuvent être proposées dès la moyenne section.

EXEMPLE DE SCÉNARIO CLASSIQUE EN GRANDE SECTION

Énoncé oral du problème : « *Vous répartissez 8 marrons dans 3 assiettes.* »

Phase 1 : la manipulation avec des marrons permet l'appropriation du problème et de faire des essais.
Phase 2 : les élèves dessinent la situation de manières très variées allant de dessins figuratifs à des ébauches de schémas (cf. figure 20).

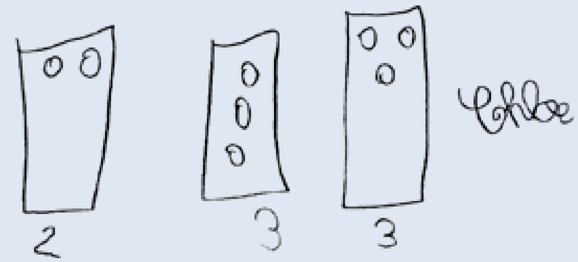


Figure 20. Représentation figurative.

Phase 3 : après rappel de l'activité précédente, les élèves doivent proposer sans matériel une autre répartition sur leur feuille. La vérification pourra se faire à l'aide du matériel, accompagnée d'une formulation orale.

LA PLACE DE LA VERBALISATION DANS L'ACCÈS À L'ABSTRACTION

Les deux étapes décrites précédemment – la manipulation et la représentation – n'ont pas d'ordre figé dans la démarche d'apprentissage de la résolution de problèmes. En revanche, elles s'accompagnent obligatoirement d'étapes de verbalisation incontournables permettant d'accéder aux concepts mathématiques et à l'abstraction.

La verbalisation permet de mettre en mots et d'expliciter l'action, sans la produire ou la représenter visuellement. Cette étape cruciale est délicate à travailler. La verbalisation concerne à la fois le professeur et les élèves.

Du point de vue du professeur

Verbaliser correspond à une phase d'étayage très importante, notamment en CP. Le professeur s'applique à verbaliser les étapes de la démarche et ses propres procédures en passant par des exemples/contre-exemples et des analogies avec des situations déjà rencontrées. Il fait également des liens explicites avec les connaissances et compétences à mobiliser pour résoudre le problème (en calcul mental, ordre de grandeurs, procédure connue, etc.). En s'appuyant sur les productions des élèves, il s'attache à formuler et reformuler le langage mathématique précis (sens des symboles et lexique spécifique) en action, lors des étapes de manipulation et de représentation, ainsi qu'en situation d'évocation, lors des phases de mise en commun et d'institutionnalisation (cf. paragraphe intitulé « Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation », p. 100).

Il doit verbaliser ses procédures afin que les élèves soient capables de verbaliser leurs propres procédures.

Du point de vue de l'élève

Il s'agit pour l'élève d'expliciter ses actions, sa démarche et ses solutions. Ces verbalisations lui permettent en premier lieu de prendre du recul par rapport aux manipulations, de formuler des hypothèses, d'anticiper et d'expliciter ses procédures. Elles l'aident à produire des arguments mathématiques pour valider ses solutions.

La verbalisation est importante à trois niveaux pour l'élève :

— pour lui-même : elle va lui permettre d'opérer un retour réflexif sur son propre raisonnement et de ne pas rester au stade de la simple manipulation. C'est l'occasion de prendre conscience de ses propres stratégies ;
— en direction des autres élèves : elle permet de préciser l'argumentation pour la rendre compréhensible par les autres, de comparer ses propres stratégies avec celles des camarades, et de travailler à l'émergence d'un référentiel de savoir commun ;
— en direction du professeur : elle doit être encouragée. La verbalisation permet au professeur de prendre de l'information et de proposer un étayage adapté.

Quelques points de vigilance

Le professeur doit provoquer, par des questions ciblées, les verbalisations des élèves à toutes les étapes du processus. Voici quelques questions qui peuvent être utilisées pour passer :

— de la manipulation passive à la manipulation active : *« À quoi réfléchis-tu ? » ; « Où en es-tu ? » ; « Que dois-tu faire pour … ? » ;*
— de la manipulation active à la formulation, à l'explicitation des procédures : *« Comment as-tu fait ? » ; « Peux-tu me dire ce qui va se passer si … ? » ; « Crois-tu qu'il va se passer …. si … ? » ;*
— de la manipulation active à la validation des solutions proposées : *« Peux-tu dire quelle solution tu as trouvée ? » ; « Peux-tu vérifier ? » ;*
— de la formulation, de l'explicitation des procédures à la validation des solutions proposées : *« Comment fais-tu ? » ; « Peux-tu me donner un exemple ? » ; « Comment peux-tu en être certain ? »*

Faire évoluer les procédures

Un même problème peut donner lieu à des stratégies diverses (cf. l'introduction de ce guide) induisant différentes procédures de la part des élèves (dénombrement, surcomptage, calcul en ligne, etc.). Elles relèvent de niveaux de conceptualisation variés **qu'il s'agira de faire évoluer dans l'année**.

Pour rappel, les trois types de stratégies codifiés sont :

— **Stratégie 1** : stratégies de dénombrement plutôt élémentaires ;
— **Stratégie 2** : stratégies de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections ;
— **Stratégie 3** : stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées ou formalisées.

L'objectif de l'enseignement de la résolution de problèmes est d'arriver progressivement à des procédures relevant de la stratégie 3 et en particulier à la production d'écritures mathématiques. Pour cela, le professeur devra pouvoir repérer dans l'action ces différentes stratégies.

Dans l'exemple ci-dessous, pour faire progresser l'élève 4, le professeur pourra rapprocher sa procédure de celle de l'élève 2.

ÉLÈVE 1

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ? 14

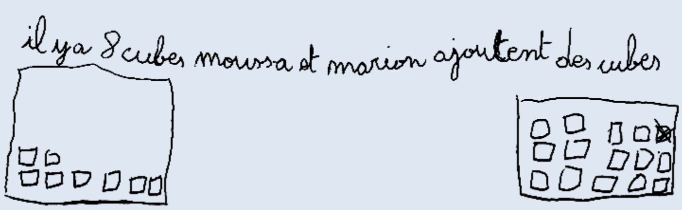


Figure 21. Stratégie de type 1.

ÉLÈVE 2

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ?

$8 + 4 + 2 = 14$

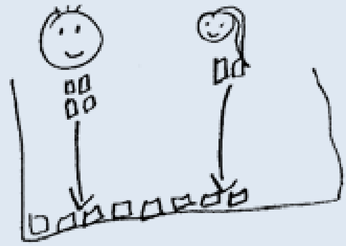


Figure 22. Stratégie de type 3 qui associe représentation imagée encore figurative et le calcul.

ÉLÈVE 3

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ? 14

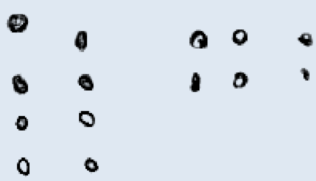


Figure 23. Stratégie de type 1 où les données sont représentées et organisées en paquets de deux.

ÉLÈVE 4

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ?

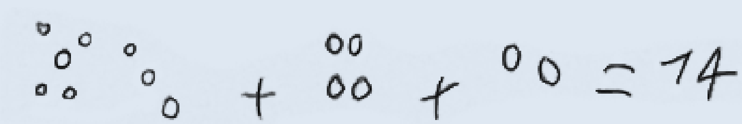


Figure 24. Stratégie hybride de types 2 et 3 qui associe représentation imagée et approche du calcul.

Problèmes arithmétiques au CP et au cycle 2 : la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Pour résoudre efficacement les problèmes arithmétiques au CP et tout au long du primaire, la modélisation joue un rôle important. Cependant il convient de faire une distinction entre « représentation » et « modélisation ».

Représenter, c'est traduire par un dessin ou un schéma la situation. Le fait de représenter la situation permet de l'appréhender et de favoriser l'entrée dans la résolution. Certaines représentations (souvent de type pictural) ne sont pas traduisibles par un calcul.

Modéliser, c'est traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle rend la réalité calculable. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

Faire le lien avec la numération et le calcul

Au CP, les élèves poursuivent le travail mené en maternelle sur les situations de décomposition et recomposition de collections à partir d'objets concrets ou figuratifs qui permettent d'automatiser progressivement les relations entre les nombres. Les élèves s'approprient puis construisent des « histoires sur les nombres » mettant en œuvre les notions de parties et de tout qui conduisent à des « problèmes mathématiques » (énoncé oral ou écrit comportant des données numériques et une ou plusieurs questions).

Travailler des problèmes de type additif est l'occasion de conduire en parallèle un travail sur la numération (cf. chapitre 1) ou le calcul (cf. chapitre 2) en utilisant un matériel adapté.

Les élèves pourront ainsi manipuler des cubes représentant les objets en jeu dans le problème ci-dessous, consistant à réunir deux collections pour trouver un tout :

➔ « *Lucie a 12 billes bleues et 23 billes rouges. Combien a-t-elle de billes en tout ?* »

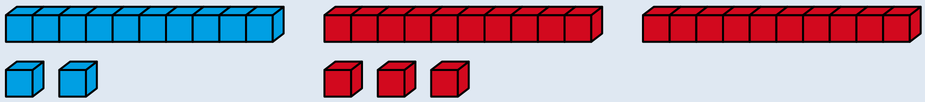


Figure 25. Réunir deux collections pour trouver un tout.

Ou encore, lorsqu'il s'agit de scinder une collection en deux pour trouver une partie :

➔ « *Lucie avait 36 billes avant la récréation. Elle en a perdu 12 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ?* »

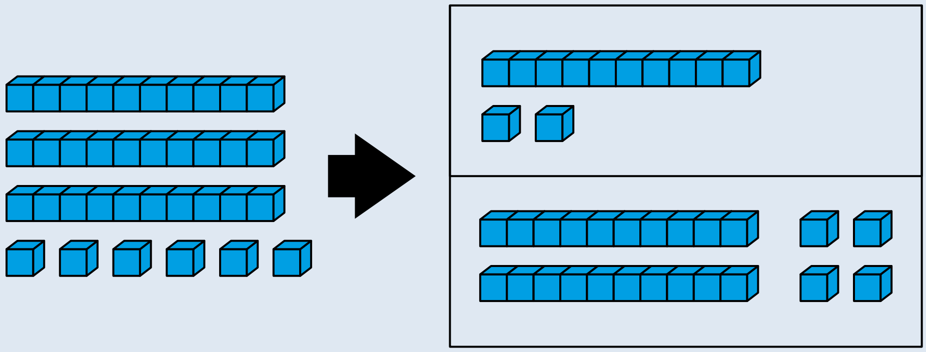


Figure 26. Scinder une collection en deux pour trouver une partie.

Ces actions conduiront progressivement à renforcer le travail sur la numération, en choisissant des nombres conduisant à regrouper 10 unités pour former une dizaine entière ou à « casser une dizaine entière », comme dans les deux exemples ci-dessous :

➔ « *Lucie a 16 billes bleues et 25 billes rouges. Combien a-t-elle de billes en tout ?* »

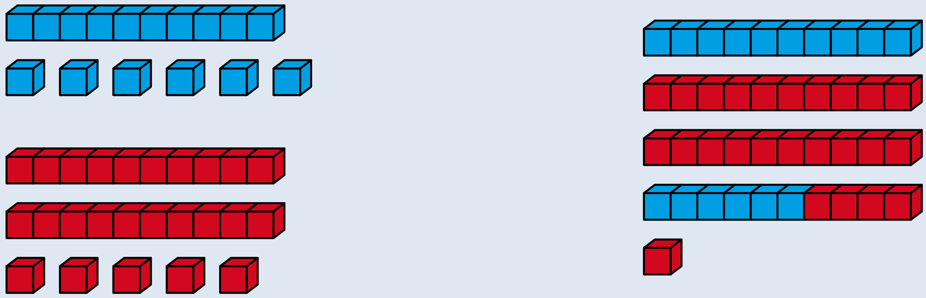


Figure 27. Regrouper 10 unités pour former une dizaine entière.

➔ « *Lucie avait 32 billes avant la récréation. Elle en a perdu 14 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ?* »

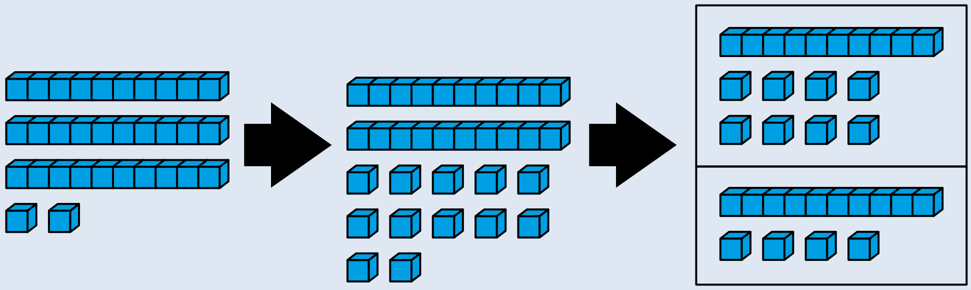


Figure 28. « Casser une dizaine entière ».

Ces travaux avec un matériel sont progressivement remplacés par une activité plus abstraite consistant à imaginer ces manipulations en construisant des schémas avec des représentations imagées des cubes et des barres de 10 cubes. À partir de la période 2, ces schémas peuvent être accompagnés de l'expression symbolique donnant le calcul à effectuer et du résultat de ce calcul.

Les productions suivantes sont des exemples pouvant être attendus des élèves en cours de CP.

En fin de CP mais surtout en CE1, les élèves pourront ne plus faire ce genre de schémas lorsque la modélisation et le calcul à effectuer leur seront plus accessibles. Ils pourront éventuellement remplacer le schéma s'appuyant sur la numération par un schéma plus abstrait et plus rapide à réaliser, s'appuyant sur la numération chiffrée et le modèle en barres proposé dans le paragraphe suivant.

EXEMPLE 1

➔ « *Lucie avait 36 billes avant la récréation. Elle en a perdu 12 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ?* »

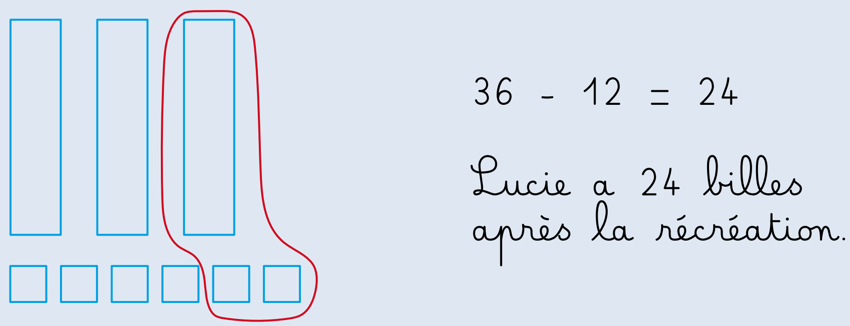


Figure 29. Exemple 1 de production d'élève.

EXEMPLE 2

➔ « *Lucie à 16 billes bleues et 25 billes rouges. Combien a-t-elle de billes en tout ?* »

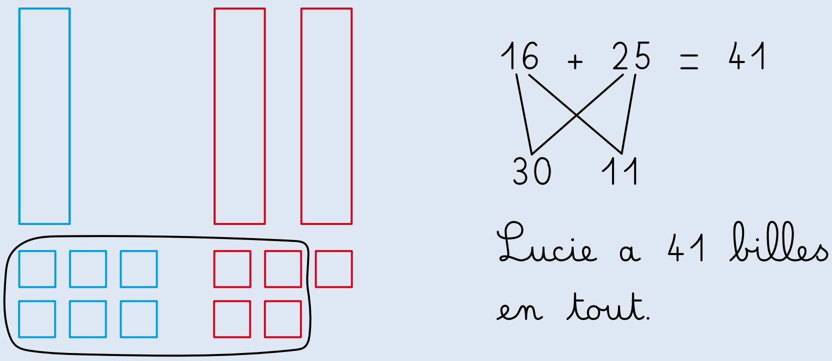


Figure 30. Exemple 2 de production d'élève.

EXEMPLE 3

➔ « *Lucie avait 32 billes avant la récréation. Elle en a perdu 14 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ?* »

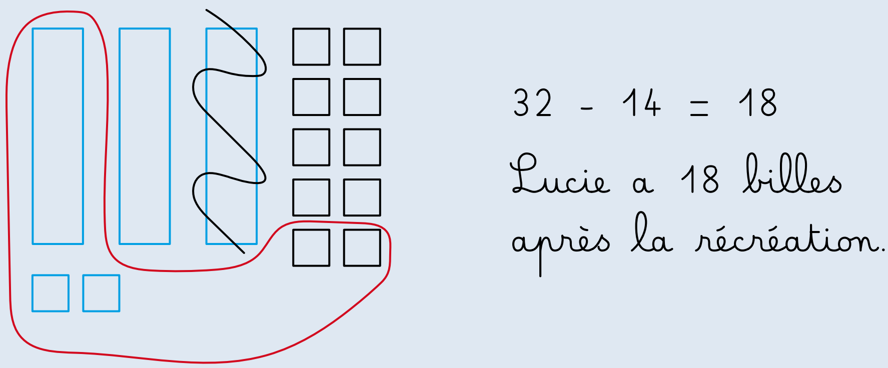


Figure 31. Exemple 3 de production d'élève.

Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma grâce au matériel

Les problèmes relevant du champ additif permettent de travailler le sens de l'addition et de la soustraction. Les problèmes proposés seront tout d'abord à une étape, puis à deux étapes. Pour les problèmes à une étape, le champ numérique évoluera au fil de l'année pour mobiliser des valeurs numériques inférieures ou égales à 100 en fin d'année scolaire.

L'objectif pour le professeur n'est pas d'enseigner une **typologie de problèmes** pouvant relever de ce champ additif, mais plutôt d'aider les élèves à modéliser en utilisant des schémas, des nombres, des opérations pour résoudre ces problèmes.

L'évolution des représentations produites par les élèves et les stratégies associées reposent sur les points suivants :

- les variables didactiques que constituent le choix du matériel proposé aux élèves, la taille des nombres dans les énoncés ;
- les connaissances mobilisables en calcul ;
- un contrat à installer entre le professeur et l'élève sur l'objectif de l'activité et les connaissances et compétences visées.

Tous les matériels ne sont pas équivalents quant aux représentations schématiques qu'ils peuvent générer et aux calculs et stratégies qui peuvent être développés à partir de ces représentations. Les cubes emboîtables, le matériel multibase, les réglettes sont des éléments intéressants pour convoquer les aspects additifs, les propriétés de décomposition des nombres ou le sens des opérations (cf. chapitre 4). Ils sont des supports utiles pour des représentations qui contribuent à la modélisation.

Commencer par des petits nombres permet une familiarisation avec les représentations. Augmenter la taille des nombres permet de rendre nécessaire l'introduction des premières représentations schématiques et symboliques, au moment de la résolution, mais aussi et surtout dans un premier temps de discuter, d'échanger, de convaincre les autres. Les élèves sont ainsi amenés à dépasser le dessin figuratif et le comptage un à un.

Enfin, il importe que le professeur précise qu'il faut réaliser des dessins qui peuvent prendre des formes variées, qu'il n'est pas nécessaire qu'ils soient beaux mais qu'ils doivent contenir certaines informations importantes pour parvenir à la résolution du problème. Progressivement, il amènera au travers des phases de synthèse à faire évoluer ces représentations et les stratégies associées grâce à un travail régulier d'analyse de ces représentations sur l'année.

Le focus « Problèmes de type parties-tout et modélisation par le schéma en barres », page suivante, décrit le principe sous-jacent à la construction du schéma en barres. Il ne s'agit pas de l'imposer en CP et par ailleurs ce n'est pas la seule représentation possible à mobiliser pour le professeur. Toutefois, il est nécessaire que la progressivité de la construction de schémas soit pensée et harmonisée du cycle 2 au cycle 3.

Ce type de schéma en barres va notamment aider les élèves à reconnaître les structures mathématiques des problèmes, les opérations et procédures sous-jacentes grâce à l'analogie visuelle entre les représentations schématiques utilisées.

Un grand avantage de cette modélisation réside dans le fait que les problèmes basiques peuvent ainsi prendre la même forme schématique et correspondre au même « modèle ». Par exemple, les quatre problèmes suivants[40] se ramènent au même type de schéma.

1. *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*

2. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

3. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

4. *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

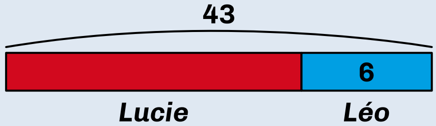


Figure 32. Problème 1.

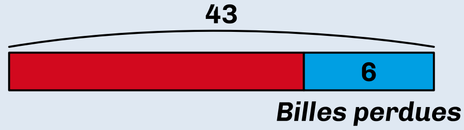


Figure 33. Problème 2.

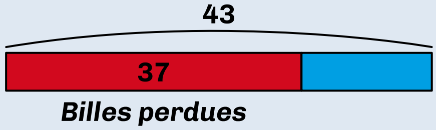


Figure 34. Problème 3.

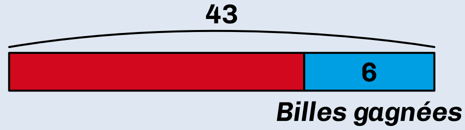


Figure 35. Problème 4.

40 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

Focus | Problèmes de type parties-tout et modélisation par le schéma en barres

En relation avec la décomposition/recomposition des nombres travaillés en maternelle puis en début d'année, les problèmes additifs sont les premiers que les élèves rencontrent au CP.

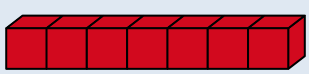
Il est important de faire travailler les élèves d'abord dans le cadre de problèmes additifs simples (de type partie 1 + partie 2 = tout) sur des nombres de petites tailles, en lien avec l'apprentissage de la numération et de l'addition, pour construire le sens de l'opération et installer des automatismes ainsi que le lien naturel entre les nombres.

En s'appuyant sur le matériel manipulé en maternelle (cubes emboîtables), les problèmes de parties-tout se modélisent progressivement avec des schémas en barres. Les cubes (de couleur) emboîtés deviendront, par un travail d'appropriation pas à pas, les barres rectangulaires dans un schéma.

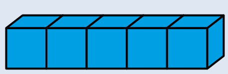
UN EXEMPLE DE PROBLÈME ET DE MODÉLISATION PROGRESSIVE PAR LE SCHÉMA EN BARRES

→ *« Léo a 7 billes rouges et 5 billes bleues. Combien Léo a-t-il de billes en tout ? »*

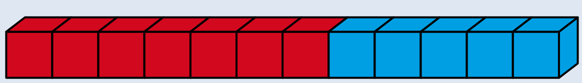
La résolution de ce problème à l'aide de 7 cubes rouges :



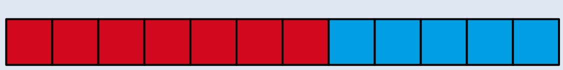
et 5 cubes bleus :



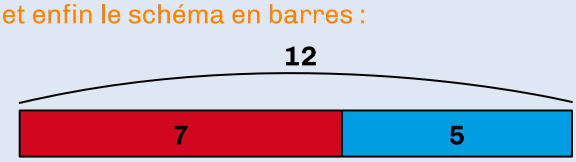
fait apparaître l'assemblage :



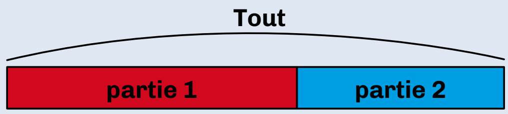
puis le schéma :



et enfin le schéma en barres :



Il correspond au schéma générique suivant :



Point de vigilance : le professeur introduira très progressivement la modélisation par le schéma en barres qui est une étape vers le mode symbolique (écriture mathématique) en s'appuyant sur les étapes décrites au paragraphe intitulé « Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation », p. 82, et en faisant référence aux situations de manipulation précédentes.

Le professeur part du matériel manipulé dans la phase de recherche (cubes emboîtables, réglettes, matériel multibase), explicite l'analogie entre les rectangles dessinés pour chaque partie et le nombre de cubes ou réglettes utilisés pour représenter les données numériques.

La modélisation par le schéma en barres est introduite par l'enseignant lors de la mise en commun : le schéma permet de représenter visuellement le raisonnement et « *de réunir les problèmes dans des catégories aussi larges que possible en faisant des analogies, par exemple, entre les problèmes pouvant s'appuyer sur les mêmes représentations* »[41]. Le professeur raconte « l'histoire » du problème en prenant appui sur le schéma. Il met en mots la relation entre les nombres et l'opération qui conduit au calcul.

Ces automatismes additifs installés vont rendre l'introduction de la **soustraction** naturelle. La soustraction est modélisée par le même schéma que la situation additive, mais pour la recherche d'une partie alors que le tout est connu :

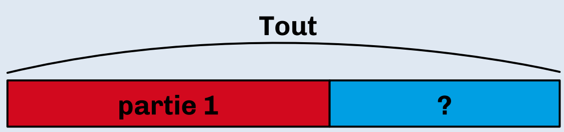


Figure 36. Modélisation d'une situation soustractive par un schéma en barres.

41 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes du champ multiplicatif du CP reposent sur des valeurs numériques adaptées aux procédures des élèves : matériel tangible, représentation imagée, modélisation, calcul (addition itérée, par exemple).

Ces problèmes permettent de construire le sens de la multiplication et de la division. Ils correspondent aux situations (de parts égales) où on cherche : le tout (multiplication), la valeur d'une part (partage/partition), le nombre de parts (quotition).

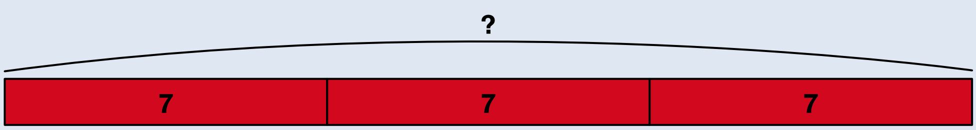
Exemples (respectifs) :

— *« Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ? »*
— *« Trois enfants se partagent 18 images. Combien d'images aura chaque enfant ? »*
— *« Il y a 24 élèves dans la classe. Pour participer à un tournoi de sport, le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ? »*

Au CP, l'approche privilégiée sera la manipulation ; les représentations imagées resteront proches de la situation et permettront de rencontrer des **configurations rectangulaires** propices à la construction du concept de multiplication et de division. Ici, le matériel, comme des « tablettes de chocolat sécables »[42] permet de traiter aisément cette situation. Pour l'approche symbolique, les élèves pourront recourir à l'addition itérée.

Exemple : *« Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ? »*

En réunissant les cubes dans des barres de 7, le professeur peut proposer le schéma en barres suivant qui permet de voir 3 fois 7 :



Un fait mathématique important à souligner par le professeur auprès des élèves lors de l'enseignement de la résolution de problèmes multiplicatifs est la « symétrie » qui existe entre les problèmes multiplicatifs et les situations de partage. Les problèmes de quotition (recherche du nombre de parts) sont souvent plus difficiles à résoudre que les problèmes de partage (recherche de la valeur d'une part). Un des objectifs importants pour le cycle 2 est de faire comprendre le lien entre ces deux types de problèmes qui relèvent de la même opération.

42 — Tablette de 18 présentée sous la forme rectangle : 1 x 18, 2 x 9, 3 x 6. Ces tablettes se forment facilement avec des cubes emboîtables dans deux directions.

Quelques éléments du continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

L'enseignement de la résolution de problèmes doit être pensé dans une construction pluriannuelle cohérente et progressive. La note de service sur la résolution de problèmes[43] rappelle qu'il s'agit de mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes. Cela nécessite de conduire, année après année, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

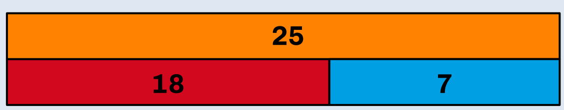
Des propos abordant le continuum didactique de l'enseignement de la résolution de problèmes du cycle 2 au cycle 3 sont forcément denses et volumineux, car la résolution de problèmes traverse de nombreux champs des mathématiques et se retrouve à chaque niveau de classe.

Nous présentons ici brièvement quelques points qui éclairent ce continuum sans être des objectifs d'enseignement au CP.

Le sens des opérations et la « symétrie » entre les opérations

Un des objectifs du cycle 2 est de faire acquérir la compréhension de la symétrie entre addition et soustraction d'un point de vue abstrait des relations arithmétiques entre les nombres : par exemple, comprendre que les deux opérations « 25 – 7 = 18 » ou « 25 – 18 = 7 » découlent – par définition même – de la relation additive entre ces 3 nombres : « 18 + 7 = 25 ».

Cette symétrie peut s'exprimer au travers de schémas avec deux barres, permettant de percevoir les relations entre les trois nombres en jeu.



L'explicitation de cette symétrie, qui doit être travaillée avec les élèves d'abord sur des petits nombres (exemple : compléments à 10, compléments à 20, puis généralisation en étendant le domaine numérique), va leur permettre à la fois une meilleure compréhension du sens des opérations mais aussi va renforcer la compréhension des relations numériques et des automatismes de calcul liés aux décompositions des nombres.

43 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

Lien avec la comparaison

Les problèmes de comparaison sont plus difficiles. Un problème de comparaison fait appel aux formulations spécifiques « de plus » et « de moins » qui sont source de difficultés pour les élèves.

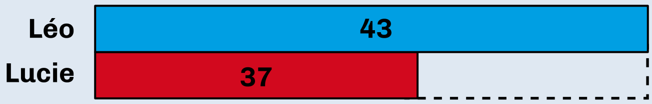
Pour résoudre ce genre de problèmes, il est important de répondre avant toute chose à une question du type « qui est le plus grand, qui en en a le plus », etc.[44]

Cette première étape permet de travailler ensuite les problèmes similaires à celui-ci :

Exemple : « *Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ?* »

Ce problème peut être traité au CP en s'appuyant sur la numération avec la représentation en barres de 10 et des cubes unité.

À partir du CE1, la modélisation par le schéma en barres va permettre tout au long des cycles 2 et 3 de visualiser les quantités en jeu : représenter la grande quantité, matérialiser éventuellement la différence et se ramener par la suite à des problèmes de parties-tout[45] :



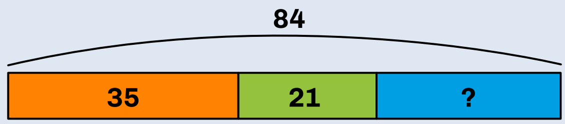
Ces modélisations ramèneront toutes les situations rencontrées dans la classification des problèmes arithmétiques élémentaires à un raisonnement unique sur des quantités positives[46].

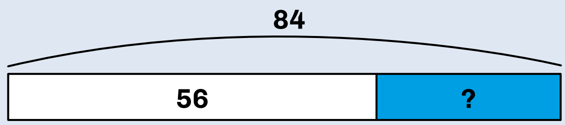
Résoudre des problèmes complexes

La modélisation installée pour les schémas parties-tout donne une stratégie d'enseignement pour apprendre à résoudre des problèmes à deux étapes en les ramenant explicitement et visuellement à des problèmes en une étape.

44 — Par exemple : « *Léo a 37 billes, Lucie en a 43. Qui en a le plus ?* »
45 — Cette démarche permet de ne raisonner que sur des quantités positives.
46 — Par exemple, on transforme un problème du style - a + c = b en a + b = c.

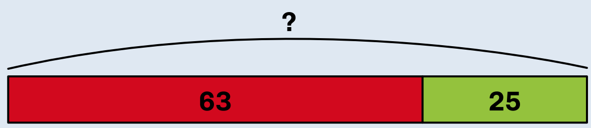
Exemple 1 : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?* »



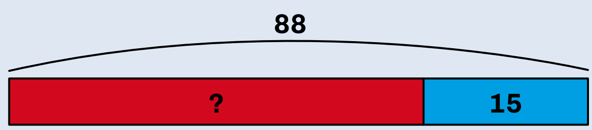


Exemple 2 : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y a-t-il alors de livres dans la bibliothèque de la classe ?* »

- **Étape 1 :** 25 livres de plus dans la bibliothèque



- **Étape 2 :** on emprunte 15 livres

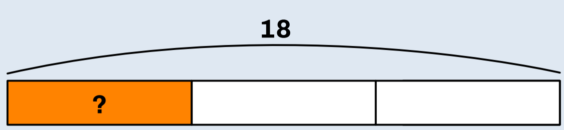


Lien avec l'introduction ultérieure de la fraction

En guidant la démarche à l'aide de la manipulation de cubes, il est possible pour le professeur de présenter un schéma multiplicatif lors d'une situation de partage.

Exemple 1 : « *3 enfants se partagent 18 images* [donner ces images]. *Combien d'images aura chaque enfant ?* » (CP)

Exemple 2 : « *Paul a 18 billes. Il en donne un tiers à Julie. Combien de billes Julie reçoit-elle ?* » (Cycle 3)



De même, on obtient un schéma similaire au cycle 3 dans l'exercice suivant : « *Construis un rectangle et colorie un tiers du rectangle* ».

Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation

La démarche de résolution de problèmes s'appuie sur différents moments – manipulation active, verbalisation, représentation de la situation – qui participent à la modélisation.

Tout au long de la démarche, les écrits de différentes natures mis en place par le professeur accompagnent l'activité des élèves et structurent le vécu commun de la classe. Un travail progressif doit débuter dès le CP quant à la production d'une trace écrite attendue en résolution de problèmes : schéma éventuel, calcul en ligne ou posé, phrase d'explicitation ou de conclusion.

Les supports des élèves

Très (et même trop) souvent, la résolution de problèmes ne laisse pas de trace exploitable durablement (ardoise, feuilles volantes).

CAHIER PERSONNEL

Pour éviter l'écueil de l'écrit éphémère, la résolution de problèmes doit être traitée dans un cahier personnel (cahier du jour, cahier spécifique aux mathématiques, etc.). Il permet à l'élève de conserver la trace des résolutions avec ses essais-erreurs, ses procédures, ses modes de représentation. Il constitue également une mémoire des problèmes rencontrés. Il facilite la conduite d'entretiens avec l'élève, pour l'aider à verbaliser, à prendre conscience de ses progrès et notamment à se situer par rapport à ce qui est attendu.

CAHIER DE RÉFÉRENCE EN MATHÉMATIQUES[47] (cahier de leçons)

Il correspond au support complémentaire et indispensable pour structurer un enseignement explicite de la résolution de problèmes. On y trouve les écrits formalisés par le professeur avec les élèves lors de la phase d'institutionnalisation. Ces écrits constituent les traces des savoirs et des compétences travaillés.

Les outils collectifs

Le support collectif fait le lien entre les écrits individuels du cahier personnel et les écrits structurés du cahier de référence.

47 — Note de service n° 2018-051, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

L'affiche constitue un écrit de référence du vécu commun de la classe : il doit être lisible, clair et succinct. L'affiche met en lumière les étapes de la résolution de problèmes : de l'énoncé en langage naturel, à la modélisation en langage mathématique en passant par des représentations schématiques (cf. figure 37).

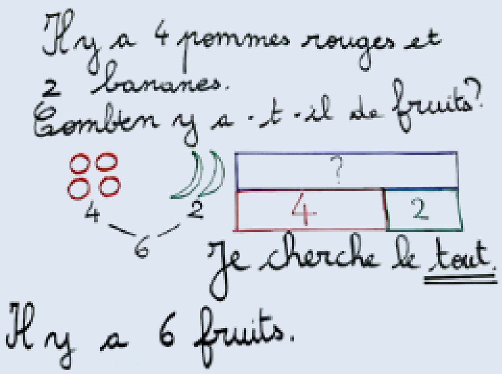


Figure 37. Exemple de bilan de savoir constitué sous forme d'affiche de classe de début de CP.

Les affiches collectives correspondent aux problèmes de référence rencontrés.

Pour l'élève, l'affiche fournit un point d'appui, un aide-mémoire des procédures de raisonnement et un modèle.

Pour le professeur, elle constitue un support pour formaliser, guider le raisonnement des élèves, et favoriser les analogies avec les problèmes antérieurs. Elle constitue une référence dans les phases d'entraînement (« *c'est comme le problème de…* »). Les problèmes dits basiques seront tout particulièrement concernés par ces écrits de référence.

Enfin, l'affichage de classe évolue au cours de l'année : dans les deux premières périodes, les affiches sont présentes pour guider les élèves dans l'acquisition de la démarche de résolution des problèmes. En cours d'année, il conviendra de les compléter ou de les faire évoluer.

Le rôle essentiel de l'institutionnalisation

L'institutionnalisation correspond à un processus à deux niveaux :

— Des mises en commun menées durant la séance (et pas seulement en fin de séance) pour garantir l'engagement et la compréhension de tous les élèves.

— L'institutionnalisation finale qui renvoie aux problèmes travaillés et aux stratégies développées à l'issue d'une séquence d'apprentissage. Cette phase permet de structurer la trace d'un savoir partagé.

Parler de références « construites avec les élèves » ne signifie en rien qu'il s'agit de productions imparfaites ; il s'agit bien au contraire de modèles dont les élèves pourront s'inspirer pour leurs propres travaux. Ces exemples-types doivent servir de références systématiques lors des résolutions de problèmes ultérieures (« *c'est comme…* »). Idéalement, ces références seront communes à l'école, voire au réseau d'écoles, pour permettre de les utiliser pendant plusieurs années[48].

48 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

En résumé

- Il s'agit **d'enseigner la résolution de problèmes**. L'enseignement explicite de la résolution de problèmes s'appuiera sur des temps d'institutionnalisation guidés par le professeur qui permettront de hiérarchiser les procédures en prenant en compte leur efficacité et leur économie. **L'objectif n'est cependant pas d'enseigner une typologie de problèmes.**

- L'enjeu est de permettre aux élèves de réussir **seuls** les problèmes arithmétiques relevant du CP en enrichissant la mémoire des problèmes de chacun [49]. Le temps consacré à la résolution des problèmes basiques doit donc être conséquent et régulier. Il importe aussi de proposer des problèmes à deux étapes (problèmes complexes).

- Le triptyque « **manipuler, verbaliser, abstraire** » offre des repères pour concevoir l'enseignement de la résolution de problèmes. L'articulation entre matériel, représentations associées et les notions mathématiques convoquées est essentielle. Il convient donc à ce titre de privilégier dès le CP des matériels décontextualisés tels que les cubes emboîtables.

- Articuler représentation et modélisation : l'appui dès le CP sur des représentations à l'aide de schémas (notamment des schémas en barres) pourra faciliter l'accès à la modélisation et préparer un continuum didactique du cycle 2 au cycle 3 pour l'enseignement de la résolution de problèmes.

49 — *Ibid*, p. 80, note 33.