

# Présentation globale du guide



Nicolas Wzorek – EMF Mission Mathématiques 62

“Faire connaître les derniers éléments de la recherche en didactique des mathématiques, notamment sur la pluralité des processus en jeu dans la construction du nombre à l’école élémentaire.”

- Chapitre 1: établit un état de la recherche en **psychologie cognitive** appliquée au domaine des mathématiques dès le plus jeune âge.
- Chapitre 2: propose un éclairage scientifique sur la **didactique** des mathématiques en maternelle.
- Chapitre 3: illustre ces enjeux par des **situations variées, structurées et progressives** pour une mise en oeuvre pragmatique en classe.
- Chapitre 4: De l'école maternelle à l'école élémentaire: le nombre dans le cadre de la continuité GS/CP

# Chapitre 1:

## Développement cognitif et apprentissage premier de la numération

# L'apprentissage des mots-nombres

Les recherches montrent que les enfants apprennent le sens des premiers nombres un par un et dans l'ordre.

*ex: "donne-moi N"*

Avant 30 mois	Les enfants ne comprennent aucun nombre.
Quelques mois plus tard	Les enfants acquièrent le sens du mot "un".
Entre 3 ans et 3 ans et demi	Les enfants apprennent le mot "deux".
Entre 3 ans et demi et 4 ans	Viennent tour à tour les mots "trois" et "quatre".

Ensuite, avec la quantité 5, les enfants acquièrent le principe de cardinalité avec le comptage-énumération.

# Le comptage-énumération

Cette étape d'entrée dans l'énumération est fondamentale.

Les apprentissages ultérieurs en mathématiques dépendent non de l'âge biologique, mais de l'âge auquel l'enfant a réussi à entrer dans l'énumération.

Ex: Seuls les enfants qui comprennent le comptage-énumération sont capables de juger que, si on place deux collections l'une en face de l'autre en situation de correspondance un à un, ces deux collections correspondent au même mot-nombre.

## Le comptage sur les doigts



Le calcul sur les doigts constitue un outil pour se détacher de supports matériels pour résoudre des opérations mentalement.

# Le comptage sur les doigts

Phase 1: les enfants modélisent les deux quantités d'un problème sur leurs doigts avant de les rassembler.



exemple:  $4 + 3$

## Le comptage sur les doigts

Phase 2: les enfants lèvent les doigts pour modéliser le premier terme de l'addition et poursuivent leur processus d'énumération



exemple:  $4 + 3$

Phase 3: apparition du surcomptage

# Bilan: progression des compétences numériques en maternelle



	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les compétences précédentes sont acquises	À partir de 5 ans ou lorsque les compétences précédentes sont acquises
<b>Récitation de la comptine numérique</b>	Peut être connue entre 0 et 10.	Peut être connue entre 15 et 30.	Peut être connue entre 20 et 40.
<b>Nombres écrits en chiffres</b>	La moitié des enfants en acquiert la lecture jusqu'à 5.	La lecture est bien acquise jusqu'à 5 et environ la moitié des enfants lit les nombres jusqu'à 10.	La lecture est aisée jusqu'à 10 et environ la moitié des enfants lit les nombres jusqu'à 30.
<b>Déterminer et exprimer la cardinalité d'un ensemble<sup>37</sup></b>	Environ la moitié des enfants réussit jusqu'à 7-8.	Les enfants y parviennent jusqu'à 7-8.	Taux de réussite élevé.
<b>« Donne-moi N »</b>	Les enfants y parviennent jusqu'à 3-4.	La moitié des enfants y parvient jusqu'à 8-9.	Presque tous les enfants y parviennent jusqu'à 10.
<b>Calcul mental</b>		Les enfants commencent à pouvoir trouver un résultat, à condition que les nombres soient tout petits et qu'on utilise la formulation « et encore » (exemple : « deux et encore un, c'est égal à combien ? »).	Plus de la moitié des enfants répond correctement avec la formulation « plus », là aussi à condition qu'il s'agisse de petits nombres.

## Pour résumer

“ Les théories et les résultats des recherches en psychologie cognitives convergent vers l'idée que l'enfant doit apprendre à **donner du sens au nombre**. (...) ”

A cette fin, la mobilisation régulière des **quatre modalités d'apprentissage à la maternelle (le jeu, la réflexion, l'exercice et la mémorisation)**, de façon complémentaire, concomitante ou alternée, réponds à ces objectifs”.

## Chapitre 2:

# Apports de la **recherche en didactique** sur les premiers apprentissages numériques

# Situations pour mettre les élèves en activité d'apprentissage



L'hypothèse fondamentale de la didactique des mathématiques est que **les situations d'enseignement doivent faire acquérir des connaissances aux élèves pour résoudre efficacement des problèmes.**



Guy Brousseau

# La théorie des situations didactiques

# 5 situations distinguées par Brousseau pour l'enseignement des concepts mathématiques



- **La dévolution** : le professeur conduit les élèves à s'approprier la tâche et à s'engager dans sa réalisation. Pour cela, il les familiarise avec le matériel à utiliser, il leur fait comprendre les contraintes à respecter et leur précise les critères de réussite. Il n'hésite pas à les faire travailler collectivement sur un exemple pour s'assurer qu'ils se sont bien approprié ces éléments, ni à les rappeler si besoin.

**Gestes professionnels à mobiliser pendant la mise en œuvre de la situation dite d'appropriation de la situation :**

- Organise un temps de familiarisation avec le matériel à utiliser
- Faire comprendre les contraintes à respecter
- Préciser les critères de réussite (lien avec la validation)
- Faire un exemple collectif pour s'assurer de la bonne appropriation de tous les éléments ( et aussi un contre-exemple)

# 5 situations distinguées par Brousseau pour l'enseignement des concepts mathématiques



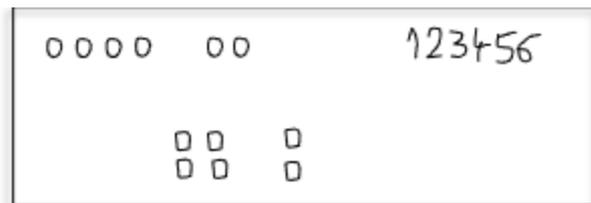
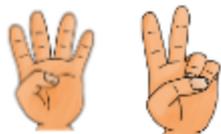
- **La situation d'action** : les élèves cherchent à réaliser la tâche proposée par le professeur. Ils se confrontent aux contraintes et critères de réussite explicités lors de la dévolution. Si nécessaire, ils adaptent leurs procédures au fil des essais, montrant ainsi qu'ils se sont bien approprié ces contraintes et ces critères. Le professeur supervise leur travail et les encourage. Autant que nécessaire, il réexplique l'objectif, les contraintes et les critères de réussite (retour à la dévolution).

## Gestes professionnels à mobiliser pendant la mise en œuvre de la situation dite d'action

- **Poser une contrainte** de manière à **dévoluer aux élèves l'enjeu d'apprentissage** visé par la situation proposée
- **Observer** les élèves,
- Si besoin, réexpliquer l'objectif, les contraintes, les critères de réussite

# 5 situations distinguées par Brousseau pour l'enseignement des concepts mathématiques

- La situation de formulation : la tâche exige que l'élève communique oralement ou par écrit. Il doit, par exemple, demander à un autre élève d'aller chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour fermer toutes les bouteilles. Ce n'est alors pas seulement le nombre qui est mobilisé, mais aussi sa désignation orale ou écrite. L'élève apprend ainsi à les mettre en lien. Lorsque l'élève écrit le nombre de bouchons souhaités, il apprend aussi que l'écrit a une fonction de communication. Ce n'est pas seulement un entraînement au geste graphique.



La forme de représentation de la procédure évolue progressivement en fonction des contraintes posées et du matériel mis à disposition dans le milieu du jeu.

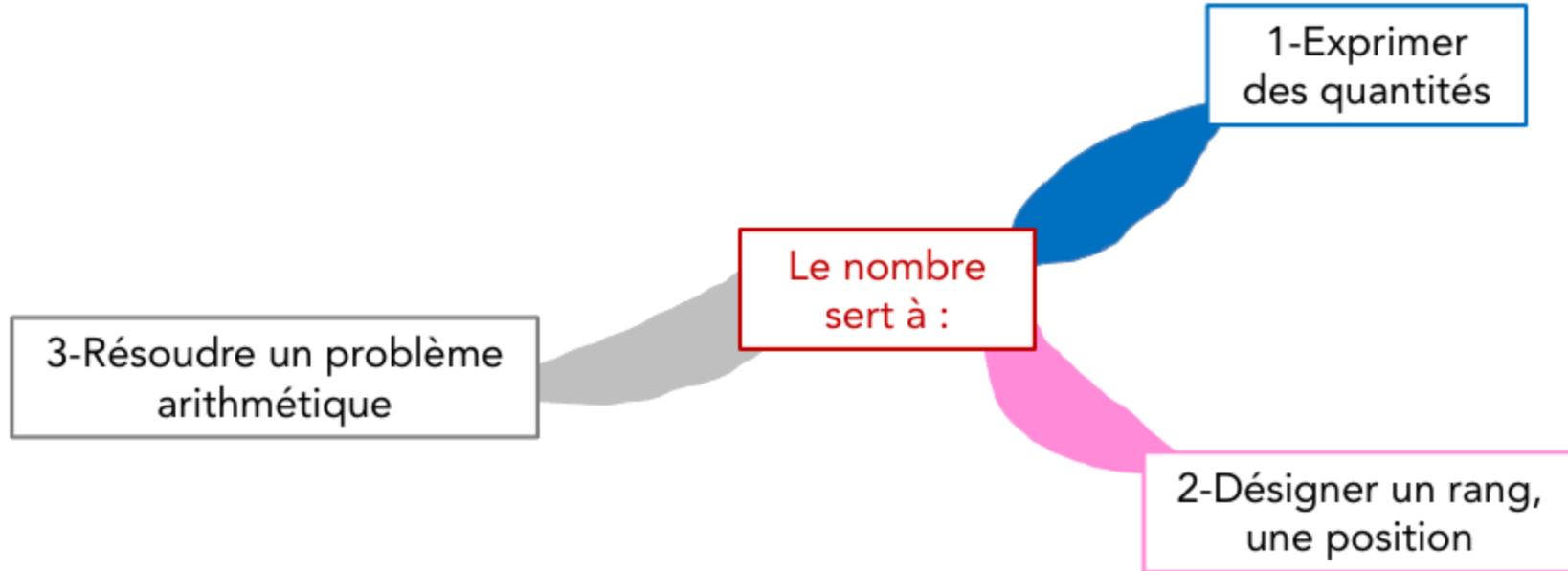
# 5 situations distinguées par Brousseau pour l'enseignement des concepts mathématiques



- La situation de validation : le professeur conduit les élèves à établir (ou à réfuter) la validité des procédures mises en œuvre, c'est-à-dire que les contraintes sont respectées et que les critères de réussite sont satisfaits.
- L'institutionnalisation : le professeur dégage la généralité des procédures rencontrées en classe. Il conduit les élèves à apprendre que des procédures utilisées pour résoudre un problème pourront encore être utilisées pour résoudre d'autres problèmes analogues.

## Apports didactiques: Les fonctions du nombre

« Le nombre a 3 fonctions » (Guide Cycle 1, p.20)



« Le nombre a 3 fonctions » (Guide Cycle 1, p.20)

1-Exprimer  
des quantités

Le nombre  
sert à :

3-Résoudre un problème  
arithmétique

## « Les voyageurs » : vers la fonction cardinale du nombre

Après un temps de familiarisation avec le matériel, chaque élève dispose d'une boîte qui représente un wagon et au fond de laquelle est posée une fiche amovible avec des ronds dessinés qui représentent les sièges des voyageurs (voir figure 2). Une autre boîte, contenant les voyageurs, est posée dans un coin de la classe; depuis cet endroit, on ne voit pas le fond du wagon. Un quai est matérialisé sur le côté du wagon. L'enseignant donne aussi un petit panier à chaque élève pour rapporter les voyageurs.



Figure 2. Boîte représentant le wagon et les sièges.

L'objectif de l'élève sera de rapporter autant de voyageurs qu'il y a de sièges dans le wagon. L'élève devra donc constituer une collection de voyageurs de même cardinal que la collection de sièges. L'éloignement du wagon et de la réserve de voyageurs contraint l'élève à trouver un moyen de garder la mémoire de la quantité. La situation vise ainsi la mise en fonctionnement de la fonction cardinale du nombre.

Consigne donnée aux élèves : « Tu dois aller chercher, en une fois, des voyageurs pour qu'il y ait un voyageur par siège, pas de siège sans voyageur, pas de voyageur sans siège. Tu utilises ton panier pour rapporter les voyageurs. »

# Analyse de situations

« Le nombre a 3 fonct

## « L'escargot » : vers la fonction ordinale du nombre

Quatorze cartes à jouer, dont le verso est identique, sont alignées sur une table ou sur le sol. À l'une des extrémités est positionné un disque bleu, à l'autre un disque rouge (voir figure 3). Un élève ferme les yeux. Pendant ce temps, à la vue des autres élèves, le professeur cache sous une des cartes un dessin d'escargot. L'élève qui a fermé les yeux doit retrouver où est caché l'escargot. Les autres élèves peuvent l'aider, mais n'ont pas le droit de montrer l'emplacement de la carte, ils peuvent seulement expliquer avec des mots.

3-Résoudre un problème arithmétique



2-Désigner un rang, une position

## LA DÉVOLUTION

Les disques bleu et rouge sont positionnés, mais l'enseignant ne dit rien sur leur usage. Il est en effet important que les élèves utilisent d'eux-mêmes ces repères pour désigner la position de l'escargot.

Pour que chaque élève comprenne bien le problème, et en particulier n'y voie pas un jeu de hasard (c'est l'enjeu de la dévolution), il est intéressant d'effectuer une ou deux parties au cours desquelles les élèves peuvent montrer où est caché l'escargot. Empêcher d'indiquer cet emplacement posera alors une contrainte, qui obligera les élèves à trouver une façon de repérer la carte qui masque l'escargot, puis de désigner l'emplacement de cette carte par sa position dans la file de cartes.

Pour les premières parties, l'enseignant placera l'escargot à l'une des extrémités, ce qui conduira probablement à des formulations comme « l'escargot est sous la carte juste avant le point rouge » où le nombre n'est pas encore nécessaire. Au fil des parties, l'enseignant éloignera l'escargot des extrémités afin de rendre indispensable l'utilisation du nombre pour désigner sa position dans la file.

## LA VALIDATION

Cette situation est conçue pour rendre possible la validation des propositions des élèves. Les points rouge et bleu évitent toute ambiguïté sur l'origine du comptage et sur le numéro de chacune des cartes. La proposition « tu pars du point rouge et tu comptes quatre cartes » permet ainsi de désigner une carte avant de vérifier que l'escargot est bien sous cette carte en la retournant.

Des propositions comme « tu comptes les cartes en partant du point rouge, quand tu es arrivé à 5, c'est la bonne carte » ou « l'escargot est sous la carte numéro 5 en partant du point rouge » ou « l'escargot est sous la cinquième carte en partant du point rouge » seront ainsi validées par le matériel. Ces formulations mobilisent toutes le nombre dans sa fonction ordinale, même celles qui ne comportent pas le mot « cinquième », puisqu'elles désignent bien la position de la carte qui cache l'escargot.

L'enseignant a un rôle important pour éviter que les élèves valident à tort certaines procédures. Si un élève indique que « l'escargot est sous la quatrième carte », l'enseignant invitera les élèves à repérer l'ambiguïté tout en maintenant, autant que possible, la validation par le matériel. Il pourra, par exemple, prendre le rôle de l'élève devant valider la proposition et soulever la quatrième carte en partant du disque bleu

## Chapitre 3:

Quelles **mises en oeuvre pédagogiques** pour prendre en compte les besoins de chaque élève?

“Ce chapitre vise à donner des **pistes** pour enseigner et mettre en oeuvre le processus d’acquisition de la notion de nombre chez les élèves de maternelle. Il s’appuie sur la **construction d’une programmation de cycle** au sein de l’école et propose des situations de **manipulations** motivantes, **variées et évolutives de la petite section à la grande section**. Il invite enfin à un **enseignement structuré, progressif, différencié et régulé** s’appuyant sur le langage oral et écrit ainsi que sur l’évaluation et l’observation des élèves.”

# Comment construire un enseignement **progressif**?



# Programmation de l'enseignement de la **fonction cardinale** des nombres



Etape 1: La **correspondance terme à terme** pour des quantités inférieures, égales ou supérieures à 3.

Etape 2: La **reconnaissance visuelle** et la désignation orale des quantités 1 et 2 puis des quantités de 1 à 3.

Etape 3: Les **procédures visuelles** pour comparer des quantités.

Etape 4: La **reconnaissance et la désignation** des quantités de **1 à 4** à partir de la reconnaissance visuelle des petites quantités et **des décompositions et recompositions**.

Etape 5: La **reconnaissance et la désignation** des quantités de **1 à 6** à partir de la reconnaissance visuelle des petites quantités et **des décompositions et recompositions** ou à partir des dispositions en constellation.

Etape 6 et 7: La **désignation des quantités jusqu'à 6 (puis 10)** en comptant de un à un et en **s'appuyant sur les décompositions et recompositions**.

# Progression: le **matériel** à disposition



Etape 1: **L'enseignant** utilise du **matériel** visible

Etape 2: Les **élèves** disposent **d'objets correspondant au contexte du problème.**

Etape 3: Les **élèves** disposent **d'objets symboliques.**

Etape 4: Les **élèves ne disposent pas** d'objets manipulables.

# Exemple de mise en oeuvre: variables, procédures, exemples de jeux



## Les variables didactiques

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées	À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées
<b>Catégorie de problème</b>	Recherche de l'état final	Recherche de l'état final	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Recherche de l'état final</li> <li>- Recherche de la transformation</li> </ul>
<b>Quantités en jeu</b>	Quantités jusqu'à 4	Quantités jusqu'à 8	Quantités jusqu'à 10
<b>Matériel et outils mis à disposition pour résoudre le problème</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ferme, puis boîte symbolisant la ferme</li> <li>- Figurines de chevaux</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ferme ou boîte, puis image de ferme</li> <li>- Figurines puis images de chevaux</li> <li>- Cubes ou bouchons symbolisant les chevaux</li> <li>- File numérique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Boîte, puis image de ferme</li> <li>- Figurines, puis images de chevaux</li> <li>- Cubes ou bouchons symbolisant les chevaux</li> <li>- File numérique</li> <li>- Feuille de papier et crayon</li> </ul>
<b>Présentation du problème</b>	Avec le matériel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Avec le matériel</li> <li>- Avec des images</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Avec le matériel</li> <li>- Avec des images</li> <li>- À partir de situations évoquées</li> </ul>

## Les procédures possibles

	À partir de 3 ans	À partir de 4 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées	À partir de 5 ans ou lorsque les connaissances précédentes sont observées
<b>Si les objets sont disponibles</b>	L'élève détermine le résultat par perception immédiate de la quantité.	L'élève : <ul style="list-style-type: none"> <li>- détermine le résultat en comptant un à un ;</li> <li>- ou utilise la reconnaissance perceptive immédiate.</li> </ul>	L'élève : <ul style="list-style-type: none"> <li>- détermine le résultat en utilisant le comptage un à un ;</li> <li>- ou utilise la reconnaissance perceptive immédiate.</li> </ul>
<b>Si les objets ne sont pas disponibles</b>	L'élève : <ul style="list-style-type: none"> <li>- recompte sur ses doigts ;</li> <li>- ou utilise sa connaissance des décompositions (= trois, c'est deux et encore un =).</li> </ul>	L'élève : <ul style="list-style-type: none"> <li>- recompte sur ses doigts ;</li> <li>- ou surcompte ou décompte avec ses doigts ou sur la file numérique ;</li> <li>- ou utilise sa connaissance des décompositions (= cinq, c'est trois et encore deux =).</li> </ul>	L'élève : <ul style="list-style-type: none"> <li>- recompte sur ses doigts, dénombre les objets qu'il a représentés sur un dessin ou un schéma ;</li> <li>- surcompte ou décompte avec ses doigts ou sur la file numérique ;</li> <li>- utilise sa connaissance des décompositions (= neuf, c'est cinq et encore quatre =).</li> </ul>

## Chapitre 4:

# De l'école maternelle à l'école élémentaire: le nombre dans le cadre de la continuité GS-CP

“ A l’école maternelle, les élèves ont appris que l’unité permet de passer d’un nombre à son suivant ou au précédent (...). Ils ont commencé à construire la fonction cardinale et ordinale du nombre. Ils ont utilisé des nombres pour résoudre des problèmes. **Ce travail contribue à la construction progressive du système décimal, avec en premier lieu la construction de la dizaine, qui est un des principaux objectifs du CP avec le passage du dénombrement au calcul.**”

Avez-vous des questions?

